Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit f une application continue sur $\mathbb{R}$. On pose $g(x) = \displaystyle\int_a^b f(x+t)\cos t\,\mathrm{d}t$.

Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer g'.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Montrer que $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^x \ln\ln t\,\mathrm{d}t \sim x\ln\ln x$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Calculer $I(a) = \displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ pour tout $a > 0$. On donnera deux méthodes différentes.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Déterminer les applications continues f telles que, pour tout x : $f(x) + \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Calculer la limite de $I(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t$ quand x tend vers 0 ou vers $+\infty$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Poser $u = t + x$, développer le cosinus, et dériver l'application g.

On trouve $g'(x) = \displaystyle\int_a^b f(x+t)\sin t\,\mathrm{d}t + f(b+x)\cos b - f(a+x)\cos a$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Intégrer par parties. Justifier et utiliser l'encadrement $0 \leq \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \leq x$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

- Première méthode : utiliser le changement de variable défini par $t = \dfrac{1}{x}$.
- Deuxième méthode : dériver $I(a)$ par rapport à la variable a.

On trouve : $\forall\, a > 0, I(a) = 0$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Supposer que f est solution. Vérifier que $f(0) = 0$.

Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $f'(0) = 0$ et que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -f(x)$.

En déduire la seule solution possible, puis vérifier.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

- Montrer qu'on peut écrire $I(x) = \dfrac{\arctan c_x}{c_x}$, avec c_x compris entre 0 et x.
- Pour tout $x \geq 1$, prouver que $0 \leq I(x) \leq \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{\pi \ln x}{2x}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.