Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Après avoir prouvé son existence, calculer l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \, \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Après avoir prouvé son existence, calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Après avoir prouvé son existence, calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Prouver l'existence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x$.

Calculer cette intégrale de trois façons différentes.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Après avoir prouvé son existence, calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Vérifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f_n(x) = 0$.

Pour $n \geq 1$, montrer que $I_n = nI_{n-1}$. En déduire $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_n = n!$

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Constater que $f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en 0 et $f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ en 1.

Utiliser le changement de variable $x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin t$. En déduire $I = \pi$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Constater $f(x) \sim \dfrac{1}{x^2}$ en $\pm\infty$. Poser $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}t$. Finalement $I = \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{3}$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Pour l'existence de l'intégrale, utiliser $|f(x)| \leq \mathrm{e}^{-x}$.

- *Première méthode :* écrire $f(x) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)\mathrm{x}}\right)$. En déduire $I = \mathrm{Re}\,\dfrac{1+\mathrm{i}}{2} = \dfrac{1}{2}$.
- *Deuxième méthode :* double intégration par parties.
- *Troisième méthode :* chercher une primitive de la forme $\mathrm{e}^{-x}(a\sin x + b\cos x)$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Pour l'existence, utiliser $f(x) \sim \dfrac{1}{x^3}$ au voisinage de $+\infty$.

Décomposer $\dfrac{1}{x^3+1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$. On trouve $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.