Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Après avoir prouvé son existence, calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Etudier l'existence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x^\beta)}$, avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Après avoir prouvé son existence, calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Etudier l'existence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 |1-x^\alpha|^\beta\,\mathrm{d}x$, avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

On définit la fonction Gamma d'Euler : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Préciser le domaine de définition de Γ.
2. Etablir la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire $\Gamma(n)$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Constater que $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}f(x)=0$ et que $\lim\limits_{x\to 0}x\sqrt{x}f(x)=0$.

Poser $t=\dfrac{1}{x}$ pour $0<a\leq x\leq b$. Dans le résultat, passer à la limite et trouver $I=0$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

L'intégrale existe si et seulement si α est strictement compris entre 1 et $1-\beta$, avec $\beta\neq 0$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Utiliser $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2f(x)=0$.

Poser $I=\lim\limits_{a\to 0}I_a$, en notant $I_a=\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x-\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$.

Poser $t=2x$ dans la deuxième intégrale et en déduire $I_a=\displaystyle\int_a^{2a}\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x}\,\mathrm{d}x+\ln 2$.

Conclure en utilisant la continuité de $x\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x}$ en 0.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

L'intégrale existe si et seulement si $\beta>\max(-1,-1-\alpha)$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

1. $\Gamma(x)$ est définie si et seulement si $x>0$.
2. Avec $x>0$, intégrer $\Gamma(x+1)$ par parties. On trouve $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.
   Montrer enfin que $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \Gamma(n)=(n-1)!$

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.