Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Après avoir prouvé son existence, calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Etudier l'existence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x^\beta)}$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Après avoir prouvé son existence, calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Etudier l'existence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{1} |1 - x^\alpha|^\beta\,\mathrm{d}x$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

On définit la fonction Gamma d'Euler : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Préciser le domaine de définition de Γ.
2. Etablir la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire $\Gamma(n)$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Constater que $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}f(x)=0$ et que $\lim_{x\to 0}x\sqrt{x}f(x)=0$.

Poser $t=\dfrac{1}{x}$ pour $0<a\leq x\leq b$. Dans le résultat, passer à la limite et trouver $I=0$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

L'intégrale existe si et seulement si α est strictement compris entre 1 et $1-\beta$, avec $\beta\neq 0$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Utiliser $\lim_{x\to 0}f(x)=1$ et $\lim_{x\to+\infty}x^2f(x)=0$.

Poser $I=\lim_{a\to 0}I_a$, en notant $I_a=\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x-\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$.

Poser $t=2x$ dans la deuxième intégrale et en déduire $I_a=\displaystyle\int_a^{2a}\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x}\,\mathrm{d}x+\ln 2$.

Conclure en utilisant la continuité de $x\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x}$ en 0.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

L'intégrale existe si et seulement si $\beta>\max(-1,-1-\alpha)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

1. $\Gamma(x)$ est définie si et seulement si $x>0$.
2. Avec $x>0$, intégrer $\Gamma(x+1)$ par parties. On trouve $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.
   Montrer enfin que $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \Gamma(n)=(n-1)!$