Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit E l'espace vectoriel de toutes les fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de E ?

1. $A = \{f \in E, 2f(0) = f(1)\}$.
2. $B = \{f \in E, f(1) = f(0) + 1\}$.
3. $C = \{f \in E, f \geq 0\}$.
4. $D = \{f \in E, f(x) \equiv f(1-x)\}$.
5. $F = \{f \in E, f$ polynômiale de degré $4\}$.
6. $G = \{f \in E, f$ polynômiale de degré $\leq 4\}$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E \Leftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

A, B, C sont des sous-espaces vectoriels de E tels que : $A \cap C \subset B$, $C \subset A + B$ et $B \subset C$.
Montrer que $B = C$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Montrer que dans l'espace vectoriel E de toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les ensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ formés respectivement des fonctions paires et impaires forment deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soient A, B, C, D quatre sous-espaces vectoriels de E tels que $E = A \oplus B = C \oplus D$.
On suppose que $A \subset C$ et $B \subset D$. Montrer que $A = C$ et $B = D$.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces de E tels que $E = E_1 + E_2$.
   Soit F_2 un supplémentaire de $E_1 \cap E_2$ dans E_2. Montrer que $E = E_1 \oplus F_2$.
2. Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des sous-espaces de E tels que $E = E_1 + E_2 + \cdots + E_n$.
   Montrer qu'il existe des sous-espaces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ de E tels que pour tout indice j on ait l'inclusion $F_j \subset E_j$ et tels que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

A, D, G sont des sous-espaces vectoriels de E. Ce n'est pas vrai pour B, C, F.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Si $F \cup G$ est un sous-espace de E, supposer par exemple que$F$ n'est pas inclus dans G.

Se donner un élément f de F qui n'est pas dans G.

Pour tout g de G, considérer $h = f + g$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Si c est dans C, il existe a dans A et b dans B tels que $c = a + b$.

Constater que a est dans B, et qu'il en est donc de même de $c = a + b$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Soit f dans E. Supposer que f s'écrit $f = p + i$.

En déduire l'expression nécessaire de $p(x)$ et de $i(x)$, puis vérifier.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Pour tout c dans C, il existe a dans A et b dans B tels que $c = a + b$.

Montrer que c est dans D. En déduire $c = a$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

1. Se donner x de E et l'écrire $x = x_1 + x_2$, avec x_1 dans E_1 et x_2 dans E_2.
   Utiliser $E_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus F_2$ pour montrer que x est dans $E_1 + F_2$.
   Montrer ensuite que si $x \in E_1 \cap F_2$, alors $x \in E_1 \cap E_2 \cap F_2$.
2. Procéder par récurrence sur l'entier $n \geq 2$.
   Dans le passage du rang $n-1$ au rang n, supposer $E = E_1 + E_2 + \cdots + E_{n-1} + E_n$.
   Poser $E' = E_1 + E_2 + \cdots + E_{n-1}$ et utiliser la question 1).
   Appliquer ensuite l'hypothèse de récurrence.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.