Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel, et f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = -\mathrm{Id}$.
Soient $V = \{x \in E, f(x) = ix\}$ et $W = \{x \in E, f(x) = -ix\}$.
Montrer que V et W sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit f un endomorphisme de E, et deux scalaires distincts α et β.
Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f^2 - (\alpha+\beta)f + \alpha\beta\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}\,(f - \alpha\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - \beta\mathrm{Id})$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit f un endomorphisme de E. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f \Leftrightarrow$ la restriction de f à $\mathrm{Im}\, f$ est un automorphisme de $\mathrm{Im}\, f$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel, et soit f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \mathrm{Id}$.
Montrer que $E = E_1 \oplus E_j \oplus E_{j^2}$, avec la notation $E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\mathrm{Id})$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit f un endomorphisme de E, et P, Q deux polynômes premiers entre eux.
Montrer que $\mathrm{Ker}\,(PQ)(f) = \mathrm{Ker}\, P(f) \oplus \mathrm{Ker}\, Q(f)$.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, g$.
2. Montrer que $f(\mathrm{Im}\, g) = \mathrm{Im}\, f$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Supposer que $u \in E$ s'écrit $u = v + w$, avec $v \in V$ et $w \in W$.

Montrer que $v = \dfrac{1}{2}(u - if(u))$ et que $w = \dfrac{1}{2}(u + if(u))$.

Réciproquement, vérifier que ces deux vecteurs conviennent.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Montrer que $\operatorname{Ker}(f - \alpha\mathrm{Id})$ et $\operatorname{Ker}(f - \beta\mathrm{Id})$ sont en somme directe.

Noter que $g = f^2 - (\alpha + \beta)f + \alpha\beta\mathrm{Id} = (f - \alpha\mathrm{Id}) \circ (f - \beta\mathrm{Id}) = (f - \beta\mathrm{Id}) \circ (f - \alpha\mathrm{Id})$.

En déduire $\operatorname{Ker}(f - \alpha\mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(f - \beta\mathrm{Id}) \subset \operatorname{Ker} g$.

Vérifier enfin que tout u de E peut s'écrire $u = \dfrac{1}{\beta - \alpha}(v - w)$, avec $\begin{cases} v = (f - \alpha\mathrm{Id})(u) \\ w = (f - \beta\mathrm{Id})(u) \end{cases}$

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

- Si $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$, soit g la restriction de f à $\operatorname{Im} f$.
  Montrer que g est un endomorphisme surjectif de $\operatorname{Im} f$. Si $v \in \operatorname{Ker} g$, noter que $f(v) = \overrightarrow{0}$.
- Réciproquement supposer que la restriction g de f à $\operatorname{Im} f$ est un automorphisme de $\operatorname{Im} f$.
  Si $u \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, utiliser l'injectivité de g pour montrer que $u = \overrightarrow{0}$.
  Si $u \in E$, utiliser la surjectivité de g pour montrer qu'il existe v dans $\operatorname{Im} f$ tel que $f(u) = g(v)$.
  En déduire que $w = u - v$ est dans $\operatorname{Ker} f$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Si $f^3 = \mathrm{Id}$, supposer que $u \in E$ s'écrit $u = u_1 + u_j + u_{j^2}$ avec $u_1 \in E_1, u_j \in E_j, u_{j^2} \in E_{j^2}$.

Prouver $u_1 = \frac{1}{3}(u + f(u) + f^2(u))$, $u_j = \frac{1}{3}(u + j^2 f(u) + j f^2(u))$, $u_{j^2} = \frac{1}{3}(u + j f(u) + j^2 f^2(u))$.

Réciproquement, vérifier que les trois vecteurs u_1, u_j, u_{j^2} conviennent.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Si $P \wedge Q = 1$, Montrer qu'il existe A, B tels que $\mathrm{Id} = (AP)(f) + (BQ)(f)$.

Si $u \in \operatorname{Ker}(PQ)(f)$, alors $u = v + w$, avec $v = (AP)(f)(u)$ et $w = (BQ)(f)(u)$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

1. Si $x = y + z$, avec $y \in \operatorname{Ker} f$ et $z \in \operatorname{Im} g$, montrer que $z = g \circ f(x)$ et $y = x - z = x - g \circ f(x)$.
   Réciproquement vérifier que ces deux vecteurs y, z conviennent.
2. Se donner $x' = f(x)$ dans $\operatorname{Im} f$. Écrire $x = y + z$, avec $y \in \operatorname{Ker} f$ et $z \in \operatorname{Im} g$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.