

## Énoncés des exercices

**EXERCICE 1** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $u_1, u_2, \dots, u_n$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ .

On définit les vecteurs  $v_k = u_1 + \dots + u_k$ , pour  $k$  compris entre 1 et  $n$ .

Montrer que  $(u)$  est libre (resp. génératrice)  $\Leftrightarrow$  il en est de même de  $(v)$ .

**EXERCICE 2** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient  $A, B$  deux polynômes de  $\mathbb{K}[X]$ , non constants, et premiers entre eux.

Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}$ . Montrer que les  $P_k = A^k B^{n-k}$  (avec  $0 \leq k \leq n$ ) forment une famille libre.

**EXERCICE 3** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux scalaires distincts. Soit  $n$  un entier naturel.

Montrer que les  $P_k = (X - \alpha)^k (X - \beta)^{n-k}$ , où  $0 \leq k \leq n$ , forment une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

**EXERCICE 4** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient  $a, b, c$  trois réels quelconques.

Montrer que  $f_a : x \mapsto \sin(x + a)$ ,  $f_b : x \mapsto \sin(x + b)$  et  $f_c : x \mapsto \sin(x + c)$  sont liées.

**EXERCICE 5** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $E$  l'espace vectoriel de toutes les applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

On note  $f_k : x \mapsto |x - k|$ . Montrer que la famille  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  est libre.