Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

On définit les trois sous-espaces suivants de $E = \mathbb{K}_3[X]$:

$$\begin{cases} F = \{P \in E, P(0) = P(1) = P(2) = 0\} \\ G = \{P \in E, P(1) = P(2) = P(3) = 0\} \\ H = \{P \in E, P(X) = P(-X)\} \end{cases}$$

- Montrer que $F \oplus G = \{P \in E, P(1) = P(2) = 0\}$.
- Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soient F et G deux sous-espaces de E, tels que $\dim(F) = \dim(G) = r$.
Montrer qu'il existe un sous-espace H de E tel que $E = F \oplus H = G \oplus H$.
Indication : utiliser une récurrence descendante sur l'entier r.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Dans $\mathbb{R}^4$, déterminer la dimension du sous-espace vectoriel engendré par :
$a = (1, 2, 2, 1)$, $b = (4, 3, 10, 5)$, $c = (-1, -3, 4, 0)$, $d = (0, 4, -3, -1)$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soient $F_1, F_2, \ldots, F_n$ des sous-espaces de E. Rappeler l'équivalence :
   $\sum_{j=1}^{n} F_j$ est directe $\Leftrightarrow \dim \sum_{j=1}^{n} F_j = \sum_{j=1}^{n} \dim F_j$.
2. Soient $p_1, \ldots, p_n$ des projecteurs de E, tels que $\sum_{j=1}^{n} p_j = \mathrm{Id}_E$.
   Montrer que $E = \mathrm{Im}\, p_1 \oplus \mathrm{Im}\, p_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}\, p_n$.
3. Prouver que pour tous indices distincts i et j, on a : $p_i \circ p_j = 0$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Montrer que l'application φ définie par $\varphi(P) = P + P'$ est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
En est-il de même avec l'application $P \mapsto \psi_\lambda(P) = \lambda P - XP'$, où $\lambda \in \mathbb{R}$?

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Si $P \in F \cap G$, il s'annule en $0, 1, 2, 3$ alors qu'il est de degré inférieur ou égal à $3 \ldots$.

Vérifier que $H = \{P = a + bX^2, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$, et que $H \cap (F \oplus G) = \{\overrightarrow{0}\}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Dans le passage du rang $r+1$ au rang r, choisir x n'appartenant pas à $F \cup G$.

Considérer $F' = F \oplus \mathbb{K}x$ et $G' = G \oplus \mathbb{K}x$, tous deux de dimension $r+1$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

La famille a, b, c, d est liée, mais a, b, d sont linéairement indépendants.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

1. Considérer $\varphi : F_1 \times \cdots \times F_n \to F_1 + \cdots + F_n$ définie par : $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$.
2. Pour tout x de E, on a $x = p_1(x) + \cdots + p_n(x)$.
   Utiliser le fait que la trace d'une projection vectorielle est égale à son rang.
3. Utiliser l'égalité $y = \sum_{i=1}^{n} p_i(y) = p_j(y) + \sum_{i \neq j} p_i(y)$ avec $y = p_j(x)$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

1. Montrer d'abord φ est un endomorphisme injectif de $\mathbb{K}[X]$.
   Considérer ensuite la restriction de φ à $\mathbb{K}_n[X]$, pour n dans $\mathbb{N}$.
2. Vérifier que si $\lambda \notin \mathbb{N}$, alors on a toujours $\deg \psi_\lambda(P) = \deg P$.
   Si $\lambda = n \in \mathbb{N}$, montrer qu'aucun polynôme de degré n n'est dans l'image de ψ_n.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.