Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, E étant de dimension finie.
Montrer que $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g) = \dim \operatorname{Im} f - \dim \operatorname{Im}(g \circ f)$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soient f et g deux endomorphismes de E (de dimension finie).
On suppose que $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$.
Montrer que ces deux sommes sont directes.
Montrer que ce résultat n'est plus valable si on ne suppose pas $\dim E < \infty$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soit f un endomorphisme de E.

1. On suppose que pour tout u de E, il existe un entier m tel que $f^m(u) = \overrightarrow{0}$.
   Montrer qu'il existe un entier p tel que pour tout u de E, $f^p(u) = \overrightarrow{0}$.
2. Montrer que ce résultat est faux si on ne suppose plus que E est de dimension finie.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E étant de dimension finie.
Soient f et g deux applications linéaires de E dans F.

1. Comparer $\operatorname{Im}(f+g)$ et $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.
   En déduire que $\operatorname{rang}(f+g) \le \operatorname{rang}(f) + \operatorname{rang}(g)$.
2. Montrer l'équivalence : $\operatorname{rang}(f+g) = \operatorname{rang}(f) + \operatorname{rang}(g) \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{\overrightarrow{0}\} \\ E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g \end{cases}$

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soient f et g dans $\mathcal{L}(E)$, tels que $f \circ g = 0$ et $f + g \in \mathrm{GL}(E)$.
Montrer que $\operatorname{rang} f + \operatorname{rang} g = \dim E$.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Soient E, F, G trois espaces vectoriels, E et F étant de dimension finie.
Soit f dans $\mathcal{L}(E,F)$ et g dans $\mathcal{L}(F,G)$.

1. Montrer que $\dim \operatorname{Ker} g \circ f \le \dim \operatorname{Ker} g + \dim \operatorname{Ker} f$.
2. Montrer que $\operatorname{rang} f + \operatorname{rang} g - \dim F \le \operatorname{rang} g \circ f \le \inf(\operatorname{rang} f, \operatorname{rang} g)$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Appliquer le théorème de la dimension à la restriction h de g à $\operatorname{Im} f$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

1. Appliquer le théorème de la dimension à f et à g, conjointement avec les hypothèses.
2. Se placer dans $E = \mathbb{K}[X]$, et considérer $f : P \mapsto P''$ et $g : P \mapsto P(0)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

1. Si $e_1, \ldots, e_n$ est une base de E, il existe des entiers m_j tel que $f^{m_j}(e_j) = \overrightarrow{0}$.
   Considérer alors $p = \max\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$.
2. Se placer dans $E = \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et considérer l'application $f : P \mapsto P'$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

1. Vérifier l'inclusion $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$. En déduire $\operatorname{rang}(f+g) \leq \operatorname{rang} f + \operatorname{rang} g$.
2. Si $\operatorname{rang}(f+g) = \operatorname{rang} f + \operatorname{rang} g$, montrer que $\begin{cases} \operatorname{Im}(f+g) = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g \\ \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) = 0 \end{cases}$
   Si $x \in E$, montrer qu'il existe $y \in E$ tel que $f(x-y) = g(y)$.
   Interpréter alors l'égalité $x = (x-y) + y$.
   Réciproquement supposer $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{\overrightarrow{0}\}$ et $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$.
   Se donner $y = f(x) \in \operatorname{Im} f$ et $y' = g(x') \in \operatorname{Im} g$.
   Décomposer x et x', et en déduire que $y + y'$ est élément de $\operatorname{Im}(f+g)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Utiliser $f \circ g = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$, et $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.
En déduire $\dim E \leq \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Im} g$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

1. Appliquer le théorème de la dimension à la restriction h de f à $H = \operatorname{Ker} g \circ f$.
   Vérifier que $\operatorname{Im} h \subset \operatorname{Ker} g$. En déduire $\dim \operatorname{Ker}(g \circ f) \leq \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g$.
2. Appliquer le théorème de la dimension à f et g.
   En déduire $\operatorname{rang} f + \operatorname{rang} g - \dim F \leq \operatorname{rang}(g \circ f)$.
   Appliquer le théorème de la dimension à la restriction h de g à $\operatorname{Im} f$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.