Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soient f et g dans $\mathcal{L}(E)$, tels que $f \circ g = 0$. Montrer que $\operatorname{rang} f + \operatorname{rang} g \leq n$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe g dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = 0$ et $\operatorname{rang} f + \operatorname{rang} g = n$.
3. Soit f dans $\mathcal{L}(E)$, avec $f \neq 0$ et $\operatorname{rang} f < n$.
   Montrer qu'il existe g dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = 0$, $g \circ f \neq 0$ et $\operatorname{rang} f + \operatorname{rang} g = n$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.
Soit u un endomorphisme de E, tel que $u^2 = 0$ (c'est-à-dire tel que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$.)

1. On suppose qu'il existe v dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $v \circ u + u \circ v = \operatorname{Id}$.
   Montrer que la restriction de v à $\operatorname{Ker} u$ est injective et que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$.
2. On suppose réciproquement que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$.
   Soit F un supplémentaire de ce sous-espace dans E.
   Montrer que pour tout x de E il existe un couple unique (y, z) de F^2 tel que $x = y + u(z)$.
3. Soit v l'application qui à x associe le vecteur z dans l'écriture précédente.
   Montrer que v est un endomorphisme de E et que $v \circ u + u \circ v = \operatorname{Id}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit f un endomorphisme de E.

1. Montrer l'équivalence : $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f = E \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
2. Montrer l'équivalence : $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
3. On suppose que E est de dimension finie.
   Montrer : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \Leftrightarrow E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit f un endomorphisme de E (avec $\dim E = n < \infty$).
Montrer l'équivalence : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow (f^2 = 0, \quad n$ est pair et $\operatorname{rang}(f) = \frac{n}{2})$.
Montrer qu'alors il existe une base de E de la forme $u_1, u_2, \ldots, u_p, f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p)$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$.
Soit f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \operatorname{Id}$.

1. Montrer que $\operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}) \subset \operatorname{Ker}(f^2 + f + \operatorname{Id})$ et $E = \operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$.
2. Soit x un vecteur non nul de $\operatorname{Im}(f - \operatorname{Id})$.
   Montrer que $f(x)$ appartient à $\operatorname{Im}(f - \operatorname{Id})$ et que x et $f(x)$ sont libres.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

1. Utiliser l'équivalence $f \circ g = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$.
2. Considérer un supplémentaire H de $\operatorname{Ker} f$, et la projection sur $\operatorname{Ker} f$ parallèlement à H.
3. Justifier qu'il existe H comme précédemment, ne contenant pas $\operatorname{Im} f$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

1. Prouver l'égalité $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v = \{\overrightarrow{0}\}$, et l'inclusion $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Im} u$.
2. Décomposer x de E en $x = y + u(t)$, avec $y \in F$ et $t \in E$.
   Décomposer de même le vecteur t.
   Pour l'unicité, si $x = y + u(z) = y' + u(z')$, prouver $y' = y$ et $z' - z \in \operatorname{Ker} u$.
3. Combiner $x = y + u(z)$ et $x' = y' + u(z')$, pour écrire $\alpha x + \beta x'$.
   Si $x = y + u(z)$, montrer que $y = v(u(x))$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Observer qu'on a toujours $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$.

1. Si $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$, se donner $v = f(u)$ et écrire $u = f(a) + b$, avec $a \in E$ et $b \in \operatorname{Ker} f$.
   Si $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f^2$: pour tout u, montrer $\exists a \in E,\ f(u) = f^2(a)$.
2. Si $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{\overrightarrow{0}\}$, se donner $u \in \operatorname{Ker} f^2$ et considérer $v = f(u)$.
   Si $\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$, se donner $u = f(v) \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$. Constater que v est dans $\operatorname{Ker} f$.
3. Appliquer les deux questions précédentes simultanément.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

- Si $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$, appliquer le théorème de la dimension.
- Réciproquement, noter que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$, puis que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.
- Si $v_1, \ldots, v_p$ est une base de $\operatorname{Im} f$, considérer des u_k tels que $v_k = f(u_k)$.
  Montrer que $u_1, \ldots, u_p, f(u_1), \ldots, f(u_p)$ forment une base de E.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

1. Si $u \in \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id})$. L'écrire $u = f(v) - v$. Vérifier que $(f^2 + f + \mathrm{Id})(u) = \overrightarrow{0}$.
   Montrer qu'il suffit de prouver que la somme $\operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}) + \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$ est directe.
2. Soit $x = (f - \mathrm{Id})(y) \neq \overrightarrow{0}$ dans $\operatorname{Im}(f - \mathrm{Id})$. Montrer que $f(x) = (f - \mathrm{Id})(f(y))$.
   L'égalité $f(x) = \lambda x$ donnerait $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$