# Énoncés des exercices

**Exercice 1** [Indication] [Correction]

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$.

1. Soient $f$ et $g$ dans $\mathcal{L}(E)$, tels que $f \circ g = 0$. Montrer que $\operatorname{rang} f + \operatorname{rang} g \leq n$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $g$ dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = 0$ et $\operatorname{rang} f + \operatorname{rang} g = n$.
3. Soit $f$ dans $\mathcal{L}(E)$, avec $f \neq 0$ et $\operatorname{rang} f < n$.
   Montrer qu'il existe $g$ dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = 0$, $g \circ f \neq 0$ et $\operatorname{rang} f + \operatorname{rang} g = n$.

**Exercice 2** [Indication] [Correction]

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$.
Soit $u$ un endomorphisme de $E$, tel que $u^2 = 0$ (c'est-à-dire tel que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$.)

1. On suppose qu'il existe $v$ dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $v \circ u + u \circ v = \mathrm{Id}$.
   Montrer que la restriction de $v$ à $\operatorname{Ker} u$ est injective et que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$.
2. On suppose réciproquement que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$.
   Soit $F$ un supplémentaire de ce sous-espace dans $E$.
   Montrer que pour tout $x$ de $E$ il existe un couple unique $(y, z)$ de $F^2$ tel que $x = y + u(z)$.
3. Soit $v$ l'application qui à $x$ associe le vecteur $z$ dans l'écriture précédente.
   Montrer que $v$ est un endomorphisme de $E$ et que $v \circ u + u \circ v = \mathrm{Id}$.

**Exercice 3** [Indication] [Correction]

Soit $f$ un endomorphisme de $E$.

1. Montrer l'équivalence : $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f = E \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
2. Montrer l'équivalence : $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
3. On suppose que $E$ est de dimension finie.
   Montrer : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \Leftrightarrow E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

**Exercice 4** [Indication] [Correction]

Soit $f$ un endomorphisme de $E$ (avec $\dim E = n < \infty$).
Montrer l'équivalence : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow (f^2 = 0, \quad n \text{ est pair et } \operatorname{rang}(f) = \frac{n}{2})$.
Montrer qu'alors il existe une base de $E$ de la forme $u_1, u_2, \ldots, u_p, f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p)$.

**Exercice 5** [Indication] [Correction]

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$.
Soit $f$ un endomorphisme de $E$ tel que $f^3 = \mathrm{Id}$.

1. Montrer que $\operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}) \subset \operatorname{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id})$ et $E = \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
2. Soit $x$ un vecteur non nul de $\operatorname{Im}(f - \mathrm{Id})$.
   Montrer que $f(x)$ appartient à $\operatorname{Im}(f - \mathrm{Id})$ et que $x$ et $f(x)$ sont libres.


©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

# Indications ou résultats

**Indication pour l'exercice 1** [Retour à l'énoncé]

1. Utiliser l'équivalence $f \circ g = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$.
2. Considérer un supplémentaire $H$ de $\operatorname{Ker} f$, et la projection sur $\operatorname{Ker} f$ parallèlement à $H$.
3. Justifier qu'il existe $H$ comme précédemment, ne contenant pas $\operatorname{Im} f$.

**Indication pour l'exercice 2** [Retour à l'énoncé]

1. Prouver l'égalité $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v = \{\overrightarrow{0}\}$, et l'inclusion $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Im} u$.
2. Décomposer $x$ de $E$ en $x = y + u(t)$, avec $y \in F$ et $t \in E$.
   Décomposer de même le vecteur $t$.
   Pour l'unicité, si $x = y + u(z) = y' + u(z')$, prouver $y' = y$ et $z' - z \in \operatorname{Ker} u$.
3. Combiner $x = y + u(z)$ et $x' = y' + u(z')$, pour écrire $\alpha x + \beta x'$.
   Si $x = y + u(z)$, montrer que $y = v(u(x))$.

**Indication pour l'exercice 3** [Retour à l'énoncé]

Observer qu'on a toujours $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$.

1. Si $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$, se donner $v = f(u)$ et écrire $u = f(a) + b$, avec $a \in E$ et $b \in \operatorname{Ker} f$.
   Si $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f^2$ : pour tout $u$, montrer $\exists a \in E,\ f(u) = f^2(a)$.
2. Si $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{\overrightarrow{0}\}$, se donner $u \in \operatorname{Ker} f^2$ et considérer $v = f(u)$.
   Si $\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$, se donner $u = f(v) \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$. Constater que $v$ est dans $\operatorname{Ker} f$.
3. Appliquer les deux questions précédentes simultanément.

**Indication pour l'exercice 4** [Retour à l'énoncé]

– Si $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$, appliquer le théorème de la dimension.

– Réciproquement, noter que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$, puis que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.

– Si $v_1, \dots, v_p$ est une base de $\operatorname{Im} f$, considérer des $u_k$ tels que $v_k = f(u_k)$.
  Montrer que $u_1, \dots, u_p, f(u_1), \dots, f(u_p)$ forment une base de $E$.

**Indication pour l'exercice 5** [Retour à l'énoncé]

1. Si $u \in \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id})$. L'écrire $u = f(v) - v$. Vérifier que $(f^2 + f + \mathrm{Id})(u) = \overrightarrow{0}$.
   Montrer qu'il suffit de prouver que la somme $\operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}) + \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$ est directe.
2. Soit $x = (f - \mathrm{Id})(y) \neq \overrightarrow{0}$ dans $\operatorname{Im}(f - \mathrm{Id})$. Montrer que $f(x) = (f - \mathrm{Id})(f(y))$.
   L'égalité $f(x) = \lambda x$ donnerait $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$


©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.