Séries Numériques I : cinq exercices

1 Étudier la série de terme général $u_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$ où α est un réel donné .

Indication exercice 1

2 Règle de Raabe-Duhamel.

Étudier la série de terme général $u_n = \dfrac{n^n a^n}{n!}$ où a est un réel strictement positif donné.

Indication exercice 2

3 Séries de Bertrand .(Officiellement hors programme)

Nature de la série de terme général u_n défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \quad , (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$$

Indication exercice 3

4

1) Nature de la série de terme général u_n défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{\sum_{1\leqslant k\leqslant n} k^{\frac{1}{k}}}$$

2) Nature de la série de terme général v_n défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

Indication exercice 4

5 Soient a un réel strictement positif , on définit la suite réelle u par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{0\leqslant p\leqslant n} \left(\frac{1}{3p+1} + \frac{1}{3p+2}\right)$$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

1) Étudier la série de terme général $\sum a^{u_n}$.

2) Dans le cas de convergence , étudier la convergence de la série des restes $r_n = \sum_{n+1\leqslant k} u_k$.



Indication exercice 5

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

Indications ou résultats

1 Indication exercice 1. [E]

Appliquer la règle de Cauchy , puis comparer avec une série de Riemann , $(n^\beta u_n)$.



Solution exercice 1

2 Indication exercice 2:Règle de Raabe-Duhamel . [E]

Utiliser par exemple la comparaison de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ si $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$.



Solution exercice 2

3 Indication exercice 3:Séries de Bertrand .(Hors programme officiel). [E]

Preuve à savoir refaire à chaque fois car les séries de Bertrand ne sont pas au programme. Distinguer $\alpha \neq 1$ et $\alpha = 1$, pour $\alpha = 1$, comparer avec une intégrale .



Solution exercice 3

4 Indication exercice 4 . [E]

1) Le plus rapide consiste à obtenir un équivalent en utilisant les sommations des relations de comparaison.

2) On peut faire un développement asymptotique de $k^{\frac{1}{k}}$.



Solution exercice 4

5 Indication exercice 5. [E]

1) Utiliser le développement asymptotique de $\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k}$ à deux termes .

2) Utiliser les sommations des relations de comparaison.



Solution exercice 5

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.