Séries Numériques I : cinq exercices

1 Étudier la série de terme général $u_n = \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$ où α est un réel donné .

Indication exercice 1

2 Règle de Raabe-Duhamel.

Étudier la série de terme général $u_n = \dfrac{n^n a^n}{n!}$ où a est un réel strictement positif donné.

Indication exercice 2

3 Séries de Bertrand .(Officiellement hors programme)

Nature de la série de terme général u_n défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \quad , (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$$

Indication exercice 3

4

1) Nature de la série de terme général u_n défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} k^{\frac{1}{k}}}$$

2) Nature de la série de terme général v_n défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

Indication exercice 4

5 Soient a un réel strictement positif , on définit la suite réelle u par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{0 \leqslant p \leqslant n} \left(\frac{1}{3p+1} + \frac{1}{3p+2}\right)$$

1) Étudier la série de terme général $\sum a^{u_n}$.

2) Dans le cas de convergence , étudier la convergence de la série des restes $r_n = \sum_{n+1 \leqslant k} u_k$.

Indication exercice 5

Indications ou résultats

1 Indication exercice 1. [E]

Appliquer la règle de Cauchy , puis comparer avec une série de Riemann , $(n^\beta u_n)$.

Solution exercice 1

2 Indication exercice 2:Règle de Raabe-Duhamel . [E]

Utiliser par exemple la comparaison de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ si $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.

Solution exercice 2

3 Indication exercice 3:Séries de Bertrand .(Hors programme officiel). [E]

Preuve à savoir refaire à chaque fois car les séries de Bertrand ne sont pas au programme. Distinguer $\alpha \neq 1$ et $\alpha = 1$, pour $\alpha = 1$, comparer avec une intégrale .

Solution exercice 3

4 Indication exercice 4 . [E]

1) Le plus rapide consiste à obtenir un équivalent en utilisant les sommations des relations de comparaison.
2) On peut faire un développement asymptotique de $k^{\frac{1}{k}}$.

Solution exercice 4

5 Indication exercice 5. [E]

1) Utiliser le développement asymptotique de $\displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k}$ à deux termes .
2) Utiliser les sommations des relations de comparaison.

Solution exercice 5