IV Familles sommables

IV.1 Définition et caractérisation des familles sommables

Une famille $u = (u_i)_{i\in I}$ indexée par un ensemble I est une application de source I . On s'intéresse ici au cas où I est strictement dénombrable c'est à dire qu'il existe une bijection σ de $\mathbb{N}$ sur I . On suppose également que la famille u est à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie. Dans ces conditions, on dit que la famille u est sommable si l'on peut choisir la bijection σ de sorte que la fonction u_σ en escalier sur $[0\,,\,+\infty[$, coïncidant sur chaque intervalle $[n\,,\,n+1[$ ($n\in\mathbb{N}$) avec la constante $u_{\sigma(n)}$, soit intégrable sur $[0\,,\,+\infty[$. On montre enfin que l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} u_\sigma$ est indépendante du choix de la bijection σ . Sa valeur s'appelle somme de la famille (sommable) u et se note $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$. On a ainsi $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \int_{\mathbb{R}_+} u_\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}$.

Théorème Caractérisation des familles sommables

Soit $u = (u_i)_{i\in I}$ une famille indexée par un ensemble dénombrable à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie E . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) La famille u est sommable

(ii) Il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \longmapsto E$ telle que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ soit normalement convergente

(iii) Pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \longmapsto E$ la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est normalement convergente

(iv) L'ensemble des sommes $\displaystyle\sum_{i\in J} ||u_i||$, où J décrit l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$, est une partie majorée de $\mathbb{R}_+$

(v) Il existe une suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante de parties finies de I recouvrant I ($i.e \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = I$) telle que les sommes $\displaystyle\sum_{i\in J_n} ||u_i||$ soient majorées

(vi) Pour toute suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante de parties finies de I recouvrant I les sommes $\displaystyle\sum_{i\in J_n} ||u_i||$ sont majorées

Lorsque l'une de ces conditions est vérifiée la somme de u est donnée par

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_{\sigma(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in J_n} u_i \tag{1.9}$$

☞ L'assertion *(iv)* montre que toute sous-famille d'une famille sommable est sommable. La formule (1.9) est encore valable pour tout recouvrement croissant de I par une suite croissante de parties (pas spécialement finies) de I .

☞ L'assertion *(ii)* montre qu'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie est sommable si et seulement si la série associée est normalement convergente.

☞ Prenons la suite anharmonique : $I = \mathbb{N}^*$ et $u = \left(\dfrac{(-1)^i}{i}\right)_{i\in I}$. Le choix dans (v) du recouvrement croissant de I par les segments $J_n = [\![1\,,\,2n]\!]$ donne

$$\sum_{i\in J_n} u_i = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} - \left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\right) \text{ soit encore}$$

$$\sum_{i\in J_n} u_i = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} = (\ln n + \gamma) - \big(\ln(2n)+\gamma\big) + o(1) = -\ln 2 + o(1)$$

d'après la formule (1.8) du §II.3. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i\in J_n} u_i = -\ln 2 = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} u_i$. Mais on peut aussi former un recouvrement croissant $(J'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de I par des parties finies telles que les sommes partielles $\sum\limits_{i\in J'_n} u_i$ de la famille u le long de ce recouvrement divergent en convergeant dans $\overline{\mathbb{R}}$:
L'exemple $J'_n = \{2k \mid k\in[\![1\,,\,n^2]\!]\}\bigcup\{2k-1 \mid k\in[\![1\,,\,n]\!]\}$ donne en effet (par l'usage comme ci-dessus de la formule (9) du §2.3) $\sum\limits_{i\in J'_n} u_i \sim \dfrac{1}{2}\ln n$.
L'exemple $J''_n = \{2k \mid k\in[\![1\,,\,n]\!]\}\bigcup\{2k-1 \mid k\in[\![1\,,\,n^2]\!]\}$ donne un recouvrement croissant de I par des parties finies telles que $\sum\limits_{i\in J''_n} u_i \sim -\dfrac{1}{2}\ln n$.

☞ Si $u = (u_i)_{i\in I}$ et $v = (v_j)_{j\in J}$ sont deux familles sommables à valeurs dans une algèbre normée $\mathcal{A}$ de dimension finie, alors la famille produit $w = (u_iv_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} u_iv_j = \sum\limits_{i\in I} u_i \sum\limits_{j\in J} v_j$.

☞ Étude de la sommabilité de la famille de réels positifs u indexée par $\mathbb{N}^{*p}$ définie par $u_{(n_1,\cdots,n_p)} = \dfrac{1}{(n_1+\cdots+n_p)^\alpha}$ (p fixé dans $\mathbb{N}^*$ et α dans $\mathbb{R}_+^*$) :
La moyenne géométrique de p réels positifs étant inférieure à leur moyenne arithmétique, on a $u_{(n_1,\cdots,n_p)} \leqslant \dfrac{1}{n_1^{\frac{\alpha}{p}}\cdots n_p^{\frac{\alpha}{p}}} = v_{(n_1,\cdots,n_p)}$. La famille v est la famille produit de la suite riemannienne $\left(\dfrac{1}{n^{\frac{\alpha}{p}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ p fois par elle même. Elle est donc sommable lorsque $\alpha > p$.
Par domination, la famille u est sommable lorsque $\alpha > p$ et sa somme vérifie

$$\sum_{(n_1,\cdots,n_p)\in\mathbb{N}^{*p}} \frac{1}{(n_1+\cdots+n_p)^\alpha} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{p}}}\right)^p.$$

Lorsque $\alpha \leqslant p$, on a $u_{(n_1,\cdots,n_p)} \geqslant \dfrac{1}{(n_1+\cdots+n_p)^p} = w_{(n_1,\cdots,n_p)}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons $J_n = \{(n_1,\cdots,n_p)\in\mathbb{N}^{*p} \mid n_1+\cdots+n_p \leqslant n\}$. $(J_n)_{n\geqslant p}$ est un recouvrement croissant de $\mathbb{N}^{*p}$ par une suite de parties finies vérifiant $\mathrm{Card}(J_n) = \mathrm{C}_n^p$. D'où