IV Familles sommables

IV.1 Définition et caractérisation des familles sommables

Une famille $u = (u_i)_{i\in I}$ indexée par un ensemble I est une application de source I. On s'intéresse ici au cas où I est strictement dénombrable c'est à dire qu'il existe une bijection σ de $\mathbb{N}$ sur I. On suppose également que la famille u est à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie. Dans ces conditions, on dit que la famille u est sommable si l'on peut choisir la bijection σ de sorte que la fonction u_σ en escalier sur $[0\,,\,+\infty[$, coïncidant sur chaque intervalle $[n\,,\,n+1[$ $(n\in\mathbb{N})$ avec la constante $u_{\sigma(n)}$, soit intégrable sur $[0\,,\,+\infty[$. On montre enfin que l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} u_\sigma$ est indépendante du choix de la bijection σ. Sa valeur s'appelle somme de la famille (sommable) u et se note $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$. On a ainsi $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \int_{\mathbb{R}_+} u_\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}$.

Théorème Caractérisation des familles sommables

Soit $u = (u_i)_{i\in I}$ une famille indexée par un ensemble dénombrable à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) La famille u est sommable

(ii) Il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \longmapsto E$ telle que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ soit normalement convergente

(iii) Pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \longmapsto E$ la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est normalement convergente

(iv) L'ensemble des sommes $\displaystyle\sum_{i\in J} ||u_i||$, où J décrit l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$, est une partie majorée de $\mathbb{R}_+$

(v) Il existe une suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante de parties finies de I recouvrant I $\left(i.e \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = I\right)$ telle que les sommes $\displaystyle\sum_{i\in J_n} ||u_i||$ soient majorées

(vi) Pour toute suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante de parties finies de I recouvrant I les sommes $\displaystyle\sum_{i\in J_n} ||u_i||$ sont majorées

Lorsque l'une de ces conditions est vérifiée la somme de u est donnée par

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_{\sigma(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in J_n} u_i \tag{1.9}$$

☞ L'assertion *(iv)* montre que toute sous-famille d'une famille sommable est sommable. La formule (1.9) est encore valable pour tout recouvrement croissant de I par une suite croissante de parties (pas spécialement finies) de I.

☞ L'assertion *(ii)* montre qu'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie est sommable si et seulement si la série associée est normalement convergente.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

☞ Prenons la suite anharmonique : $I = \mathbb{N}^*$ et $u = \left(\dfrac{(-1)^i}{i}\right)_{i\in I}$. Le choix dans (v) du recouvrement croissant de I par les segments $J_n = [\![\,1\,,\,2n\,]\!]$ donne

$$\sum_{i\in J_n} u_i = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} - \left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\right) \text{ soit encore}$$

$$\sum_{i\in J_n} u_i = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} = (\ln n + \gamma) - \big(\ln(2n) + \gamma\big) + o(1) = -\ln 2 + o(1)$$

d'après la formule (1.8) du §II.3. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i\in J_n} u_i = -\ln 2 = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} u_i$. Mais on peut aussi former un recouvrement croissant $(J'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de I par des parties finies telles que les sommes partielles $\sum\limits_{i\in J'_n} u_i$ de la famille u le long de ce recouvrement divergent en convergeant dans $\overline{\mathbb{R}}$:
L'exemple $J'_n = \{2k \mid k \in [\![\,1\,,\,n^2\,]\!]\}\bigcup\{2k-1 \mid k \in [\![\,1\,,\,n\,]\!]\}$ donne en effet (par l'usage comme ci-dessus de la formule (9) du §2.3) $\sum\limits_{i\in J'_n} u_i \sim \dfrac{1}{2}\ln n$.
L'exemple $J''_n = \{2k \mid k \in [\![\,1\,,\,n\,]\!]\}\bigcup\{2k-1 \mid k \in [\![\,1\,,\,n^2\,]\!]\}$ donne un recouvrement croissant de I par des parties finies telles que $\sum\limits_{i\in J''_n} u_i \sim -\dfrac{1}{2}\ln n$.

☞ Si $u = (u_i)_{i\in I}$ et $v = (v_j)_{j\in J}$ sont deux familles sommables à valeurs dans une algèbre normée $\mathcal{A}$ de dimension finie, alors la famille produit $w = (u_i v_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} u_i v_j = \sum\limits_{i\in I} u_i \sum\limits_{j\in J} v_j$.

☞ Étude de la sommabilité de la famille de réels positifs u indexée par $\mathbb{N}^{*p}$ définie par $u_{(n_1,\cdots,n_p)} = \dfrac{1}{(n_1+\cdots+n_p)^\alpha}$ (p fixé dans $\mathbb{N}^*$ et α dans $\mathbb{R}_+^*$) :
La moyenne géométrique de p réels positifs étant inférieure à leur moyenne arithmétique, on a $u_{(n_1,\cdots,n_p)} \leqslant \dfrac{1}{n_1^{\frac{\alpha}{p}}\cdots n_p^{\frac{\alpha}{p}}} = v_{(n_1,\cdots,n_p)}$. La famille v est la famille produit de la suite riemannienne $\left(\dfrac{1}{n^{\frac{\alpha}{p}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ p fois par elle même. Elle est donc sommable lorsque $\alpha > p$.
Par domination, la famille u est sommable lorsque $\alpha > p$ et sa somme vérifie

$$\sum_{(n_1,\cdots,n_p)\in\mathbb{N}^{*p}} \frac{1}{(n_1+\cdots+n_p)^\alpha} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{p}}}\right)^p.$$

Lorsque $\alpha \leqslant p$, on a $u_{(n_1,\cdots,n_p)} \geqslant \dfrac{1}{(n_1+\cdots+n_p)^p} = w_{(n_1,\cdots,n_p)}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons $J_n = \{(n_1,\cdots,n_p) \in \mathbb{N}^{*p} \mid n_1+\cdots+n_p \leqslant n\}$. $(J_n)_{n\geqslant p}$ est un recouvrement croissant de $\mathbb{N}^{*p}$ par une suite de parties finies vérifiant $\mathrm{Card}(J_n) = \mathrm{C}_n^p$. D'où

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.