Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soient a, b, c trois réels tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Soit $M = \begin{pmatrix} a^2-1 & ab & ac \\ ab & b^2-1 & bc \\ ac & bc & c^2-1 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier $n \geq 1$, calculer M^n.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Calculer A^{100}, avec $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Calculer A^n, avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit $A = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix}$. Calculer A^n.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

On considère la matrice carrée M définie par $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $(M - I)(M + 3I) = 0$. En déduire M^n, pour tout n de $\mathbb{N}$.
2. Vérifier que l'expression obtenue pour M^n est encore valable si $n < 0$.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Soit A une matrice carrée.

On suppose qu'il existe deux matrices U, V telles que $A^n = \lambda^n(U + nV)$ pour $n = 1, 2, 3$.

Montrer que l'égalité $A^n = \lambda^n(U + nV)$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Noter $N = M + I$, et constater que $N^2 = N$. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n = (-1)^{n+1}M$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Noter que $A = I + 4J$ avec $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $J^2 = 0$. En déduire $A^{100} = I + 400J$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

On constate que $A^3 = 0$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Poser $A = \mathrm{e}^x J + \mathrm{e}^{-x} K$, avec $J = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $K = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Constater que $J^2 = J$, $K^2 = K$, et $JK = KJ = 0$.

En déduire : $\forall n \geq 1,\ A^n = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} nx & \operatorname{sh} nx \\ \operatorname{sh} nx & \operatorname{ch} nx \end{pmatrix}$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

1. On a effectivement $(M - I)(M + 3I) = 0$.
   Noter $a_n X + b_n$ le reste dans la division de X^n par $P = (X - 1)(X + 3)$.
   Montrer que $a_n = \dfrac{1}{4}(1 - (-3)^n)$ et $b_n = \dfrac{1}{4}(3 + (-3)^n)$. En déduire $M^n = a_n M + b_n I$.
2. On sait que pour $n \geq 0$: $M^n = A + (-3)^n B$ avec $A = \dfrac{1}{4}(M + 3I)$ et $B = \dfrac{1}{4}(I - M)$.
   Pour $n \geq 0$, montrer que $A + (-3)^n B$ et $A + (-3)^{-n} B$ sont inverses l'une de l'autre.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Éliminer U et V dans les trois égalités. En déduire $A^3 = \lambda(2A^2 - \lambda A)$.

Montrer ensuite l'égalité $A^n = \lambda^n(U + nV)$ par récurrence sur n.