

## Énoncés des exercices

### EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Soient  $a, b$  deux réels, et  $E$  l'ensemble des matrices  $M(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu b & \lambda + \mu a \end{pmatrix}$ , ( $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ).

Montrer que  $E$  est une sous-algèbre commutative de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

A quelle condition sur  $a, b$  est-ce un corps ?

### EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Pour tout réel  $t$ , on définit la matrice  $A(t)$  par  $A(t) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} & t \\ \frac{t^2}{2} & 1 - \frac{t^2}{2} & t \\ t & -t & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer  $A(s)A(t)$ .
2. Calculer  $(A(t) - I)^3$ .
3. Trouver  $(\alpha_n), (\beta_n), (\gamma_n)$  telles que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $A(t)^n = \alpha_n A(t)^2 + \beta_n A(t) + \gamma_n I$ .

### EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Soit  $E = \left\{ M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3c & a - 3c & b \\ 3b & -3b + 3c & a - 3c \end{pmatrix}, \text{ avec } a, b, c \text{ réels} \right\}$ .

Montrer que  $E$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

En donner la dimension et une base.

### EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Soit  $\mathcal{D}$  l'ensemble des  $A = (a_{ij})$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui vérifient le système  $\begin{cases} \forall (i, j), a_{ij} \geq 0 \\ \forall i, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \end{cases}$

1. Montrer que  $\mathcal{D}$  est stable pour le produit des matrices.
2. Déterminer les matrices  $A$  de  $\mathcal{D}$ , inversibles et telles que  $A^{-1} \in \mathcal{D}$ .

### EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Montrer que l'ensemble  $E$  des  $M(x, y) = \begin{pmatrix} x + y & 4y \\ -y & x - y \end{pmatrix}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

En donner une base et la dimension. Est-ce un corps ?

## Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [ [Retour à l'énoncé](#) ]

$E$  est le plan de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  engendré par  $I$  et  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & a \end{pmatrix}$ .

Calculer  $J^2$  et en déduire la stabilité de  $E$  pour le produit.

Chercher à quelle condition  $M(\lambda, \mu)$  est inversible dans  $E$ .

En déduire que  $E$  est un corps si et seulement si  $b > \frac{a^2}{4}$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [ [Retour à l'énoncé](#) ]

– Remarquer que  $A(t)$  s'écrit  $A(t) = I + tJ + \frac{t^2}{2}K$ .

Vérifier  $J^2 = K$ ,  $K^2 = 0$  et  $JK = KJ = 0$ . En déduire  $A(t)A(s) = A(t+s)$ .

– Prouver que  $(A(t) - I)^2 = t^2K$ , puis  $(A(t) - I)^3 = 0$ .

– Poser  $A(t) = I + B(t)$  avec  $B(t) = A(t) - I$ .

Calculer alors  $A(t)^n$  en utilisant la formule du binôme.

On trouve  $A(t)^n = \frac{n(n-1)}{2}A(t)^2 - n(n-2)A(t) + \frac{(n-1)(n-2)}{2}I$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [ [Retour à l'énoncé](#) ]

$E$  est le sous-espace de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  engendré par  $I = M(1, 0, 0)$ ,  $J = M(0, 1, 0)$ ,  $K = M(0, 0, 1)$ .

Vérifier que  $I, J, K$  sont libres.

Calculer  $JK$  et  $KJ$  et en déduire que  $E$  est une sous-algèbre de dimension 3 de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [ [Retour à l'énoncé](#) ]

– Constater que si  $A \in \mathcal{D}$ , alors ses coefficients de  $A$  sont inférieurs ou égaux à 1.

Vérifier que si  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$  sont dans  $\mathcal{D}$ , alors  $C = AB = (c_{ij})$  est dans  $\mathcal{D}$ .

– Avec les mêmes notations, supposer que  $C$  soit égale à la matrice identité.

Montrer que chaque ligne de  $A$  ne porte qu'un seul coefficient non nul, et qui vaut 1.

Noter  $\sigma(i)$  le numéro de colonne où se trouve ce coefficient.

Montrer que  $\sigma$  est une bijection de  $\{1, \dots, n\}$ . Établir une réciproque.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [ [Retour à l'énoncé](#) ]

$E$  est le plan de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  engendré par  $I$  et  $J = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $J^2$  et en déduire que  $E$  est une sous-algèbre commutative de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Montrer que toute matrice non nulle de  $E$  est inversible dans  $E$  (qui est donc un corps).