

## Énoncés des exercices

### EXERCICE 1 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Pour  $A$ , carrée d'ordre  $n$  et de terme général  $a_{ij}$ , on pose  $\text{tr } A = \sum_{j=1}^n a_{jj}$  (*trace* de  $A$ ).

Montrer que pour des matrices  $A$  de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ , on a  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

### EXERCICE 2 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Montrer que l'égalité  $AB - BA = I$  est impossible dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

### EXERCICE 3 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

On suppose que pour tout  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a  $\text{tr}(AM) = \text{tr}(BM)$ .

Montrer que les matrices  $A$  et  $B$  sont égales.

### EXERCICE 4 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $f$  une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer qu'il existe une matrice unique  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que, pour toute matrice  $X$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $f(X) = \text{tr}(AX)$ .

### EXERCICE 5 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $E$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  formé des matrices antisymétriques.

Soit  $A$  une matrice fixée dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

1. Rappeler quelle est la dimension de  $E$  et en donner une base simple.
2. On définit l'application  $f$  sur  $E$  par  $f(M) = {}^T A M + M A$ .

Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ . Calculer  $\text{tr } f$  en fonction de  $\text{tr } A$ .