Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Pour A, carrée d'ordre n et de terme général a_{ij}, on pose $\operatorname{tr} A = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$ (*trace* de A).

Montrer que pour des matrices A de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et B de $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$, on a $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Montrer que l'égalité $AB - BA = I$ est impossible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On suppose que pour tout M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(BM)$.

Montrer que les matrices A et B sont égales.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une matrice unique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour toute matrice X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(X) = \operatorname{tr}(AX)$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices antisymétriques.

Soit A une matrice fixée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Rappeler quelle est la dimension de E et en donner une base simple.
2. On définit l'application f sur E par $f(M) = {}^{\mathrm{T}}A\,M + MA$.
   Montrer que f est un endomorphisme de E. Calculer $\operatorname{tr} f$ en fonction de $\operatorname{tr} A$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.