Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Déterminer la matrice A dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ sachant que $(1, 2, -1)$ appartient à $\operatorname{Ker} f$, que $f(e_1) = (2, 1, 1)$ et que $f(e_2) = (3, 0, -1)$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, linéaire, de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques.
Déterminer l'image et le noyau de f.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, linéaire, de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 2a \\ a & -1 & a \\ 2a & 2a & 1 \\ 2a+1 & a & 2a+1 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques.
Déterminer l'image et noyau de f.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Image du plan $P : x + y + z = 0$ par $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par $\begin{cases} X = 5x + 2y - z \\ Y = -8x - 3y + 2z \\ Z = -x - 2y - 3z \\ T = 3x - y - 5z \end{cases}$
Image réciproque de l'hyperplan $H : X + Y + Z + T = 0$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$, on pose $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$.
Soit $\varphi : E \to E$ définie par $\varphi(P) = R$, où R est le reste dans la division de AP par B.
Montrer que φ est un endomorphisme de E. Quel est son noyau ? son image ?

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On trouve $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est le plan de $\mathbb{R}^4$ engendré par $a = (-5, -7, 1, 0)$ et $b = (-2, 1, 0, 1)$.

En déduire que $\operatorname{Im} f = 2$ est un plan dont une base est formée de $\begin{cases} f(e_1) = (2, -1, 3) \\ f(e_2) = (-1, 2, 0) \end{cases}$

L'équation de $\operatorname{Im} f$ dans la base canonique est $2X + Y - Z = 0$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

- Si $a = -1$, $\operatorname{Ker} f$ est la droite engendrée par $(1, -1, 0)$.
  $\operatorname{Im} f$ est alors le plan engendré par $(1, 0, -1, 0)$ et $(0, 1, 1, 1)$.
- Si $a \neq -1$ et $a \neq \frac{1}{2}$, l'application f est injective.
  Dans ce cas l'image de f est l'hyperplan d'équation $X + Z - T = 0$.
- Si $a = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Ker} f$ est la droite engendrée par $(1, 0, -1)$.
  Les vecteurs $(1, \frac{1}{2}, 1, 2)$ et $(-\frac{1}{2}, -1, 1, \frac{1}{2})$ forment une base du plan $\operatorname{Im} f$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

L'image de P est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $v = (3, -5, 1, 4)$.

L'image réciproque de H est le plan Q d'équation $x + 4y + 7z = 0$ dans la base canonique.

Le plan Q est engendré par les vecteurs $(4, -1, 0)$ et $(7, 0, -1)$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

L'unicité de la division euclidienne permet de prouver la linéarité de φ.

$\operatorname{Ker} P$ est la droite vectorielle engendrée par $X^3 + X^2 + X$.

L'image de φ est l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ qui s'annulent en 1.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.