

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Déterminer relativement aux bases canoniques la matrice A de l'application linéaire f de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^3 définie par $f(1, -1) = (-1, -2, 5)$ et $f(2, -3) = (0, 5, 4)$.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Soit f un morphisme de E muni de la base $(e) = (e_1, e_2, e_3)$, vers F muni de $(\varepsilon) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ la matrice de f dans les bases (e) et (ε) .

- Déterminer la matrice B de f quand on remplace la base (e) par la base (e') définie par $e'_1 = e_2 + e_3$, $e'_2 = e_3 + e_1$, $e'_3 = e_1 + e_2$.
- On garde (e') mais on remplace (ε) par (ε') : $\varepsilon'_1 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ et $\varepsilon'_2 = 5\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2$.
Déterminer la matrice C de f dans les bases (e') et (ε') .

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Soit f un endomorphisme de E ($\dim E = n \geq 1$).

On suppose que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

Montrer qu'il existe une base de E où la matrice de f est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ dont la matrice est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

On pose que $\varepsilon_1 = (-13, -37, 3, 1)$, $\varepsilon_2 = (1, -1, 0, 0)$, $\varepsilon_3 = (1, 2, 0, 0)$, et $\varepsilon_4 = (-7, 1, -5, 5)$.

Montrer que $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ forment une base de \mathbb{R}^4 .

Montrer que la matrice de f dans la base (ε) est diagonale.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$, dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe une base de \mathbb{R}^4 dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

On trouve $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -11 & -9 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

On trouve $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 5 & 9 & -22 \\ -2 & -3 & 9 \end{pmatrix}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Se donner un vecteur u de E tel que $f^{n-1}(u) \neq \vec{0}$.

Montrer que $u_1 = f^{n-1}(u), u_2 = f^{n-2}(u), \dots, u_{n-1} = f(u), u_n = u$ forment une base de E .

Vérifier que la matrice de f dans cette base est la matrice A de l'énoncé.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

- Vérifier que la matrice P de la famille (ε) dans la base canonique est inversible.
- Montrer que $\forall k \in \{1, 2, 3, 4\}, \exists \lambda_k \in \mathbb{R}, f(\varepsilon_k) = \lambda_k \varepsilon_k$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Montrer que le système $f(u) = \lambda u$ a des solutions non nulles $\Leftrightarrow \lambda \in \{-3, 3\}$.

Vérifier que $\text{Ker}(f - 3\text{Id})$ est le plan engendré par $\varepsilon_1 = (1, -1, 0, 0)$ et $\varepsilon_2 = (0, -1, 1, 1)$.

Vérifier que $\text{Ker}(f + 3\text{Id})$ est le plan engendré par $\varepsilon_3 = (1, 1, -1, 0)$ et $\varepsilon_4 = (0, 0, -1, 1)$.

Justifier pourquoi ces quatre vecteurs forment une base de \mathbb{R}^4 .

Conclure en exprimant la matrice de f dans cette base.