Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Déterminer relativement aux bases canoniques la matrice A de l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$ définie par $f(1,-1)=(-1,-2,5)$ et $f(2,-3)=(0,5,4)$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit f un morphisme de E muni de la base $(e)=(e_1,e_2,e_3)$, vers F muni de $(\varepsilon)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$.

Soit $A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&2&-3\end{pmatrix}$ la matrice de f dans les bases (e) et (ε).

1. Déterminer la matrice B de f quand on remplace la base (e) par la base (e') définie par $e'_1=e_2+e_3$, $e'_2=e_3+e_1$, $e'_3=e_1+e_2$.
2. On garde (e') mais on remplace (ε) par (ε') : $\varepsilon'_1=2\varepsilon_1+\varepsilon_2$ et $\varepsilon'_2=5\varepsilon_1+3\varepsilon_2$.
   Déterminer la matrice C de f dans les bases (e') et (ε').

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit f un endomorphisme de E ($\dim E=n\geq 1$).

On suppose que $f^n=0$ et $f^{n-1}\neq 0$.

Montrer qu'il existe une base de E où la matrice de f est $A=\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0\\0&0&1&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\\vdots&\dots&\dots&0&1\\0&\dots&\dots&0&0\end{pmatrix}$

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ dont la matrice est $A=\begin{pmatrix}0&1&5&9\\2&1&6&8\\0&0&0&3\\0&0&1&-2\end{pmatrix}$ dans la base canonique.

On pose que $\varepsilon_1=(-13,-37,3,1)$, $\varepsilon_2=(1,-1,0,0)$, $\varepsilon_3=(1,2,0,0)$, et $\varepsilon_4=(-7,1,-5,5)$.

Montrer que $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ forment une base de $\mathbb{R}^4$.

Montrer que la matrice de f dans la base (ε) est diagonale.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$, dont la matrice dans la base canonique est $A=\begin{pmatrix}-1&-4&-2&-2\\-4&-1&-2&-2\\2&2&1&4\\2&2&4&1\end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On trouve $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -11 & -9 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On trouve $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 5 & 9 & -22 \\ -2 & -3 & 9 \end{pmatrix}$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Se donner un vecteur u de E tel que $f^{n-1}(u) \neq \overrightarrow{0}$.
Montrer que $u_1 = f^{n-1}(u), u_2 = f^{n-2}(u), \ldots, u_{n-1} = f(u), u_n = u$ forment une base de E.
Vérifier que la matrice de f dans cette base est la matrice A de l'énoncé.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

- Vérifier que la matrice P de la famille (ε) dans la base canonique est inversible.
- Montrer que $\forall\, k \in \{1,2,3,4\},\ \exists\, \lambda_k \in \mathbb{R},\ f(\varepsilon_k) = \lambda_k \varepsilon_k$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Montrer que le système $f(u) = \lambda u$ a des solutions non nulles $\Leftrightarrow \lambda \in \{-3, 3\}$.
Vérifier que $\mathrm{Ker}\,(f - 3\mathrm{Id})$ est le plan engendré par $\varepsilon_1 = (1,-1,0,0)$ et $\varepsilon_2 = (0,-1,1,1)$.
Vérifier que $\mathrm{Ker}\,(f + 3\mathrm{Id})$ est le plan engendré par $\varepsilon_3 = (1,1,-1,0)$ et $\varepsilon_4 = (0,0,-1,1)$.
Justifier pourquoi ces quatre vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^4$.
Conclure en exprimant la matrice de f dans cette base.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.