Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Montrer ques les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Vérifier que les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 16 & -1 \\ 232 & -15 \end{pmatrix}$ sont semblables, et trouver toutes les matrices inversibles P telles que $P^{-1}AP = B$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Montrer qu'il existe P tq $B = P^{-1}AP$ où $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Montrer que $\varepsilon_1 = (i, 2)$, $\varepsilon_2 = (-2i, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.

Montrer que la matrice B de f dans la base (ε) est diagonale. En déduire A^n.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\varepsilon_1 = (0, 1, 1)$, $\varepsilon_2 = (1, 1, 0)$, $\varepsilon_3 = (1, 1, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Montrer que la matrice de f dans la base (ε) est $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. En déduire A^n.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Noter f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique.
Il faut trouver $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ tels que $f(\varepsilon_1) = f(\varepsilon_3) = \overrightarrow{0}$ et $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Poser $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et résoudre $PB = AP$.

On trouve les matrices $P = \begin{pmatrix} -15b - d & b \\ -8b - 16d & d \end{pmatrix}$, inversibles si $(b, d) \neq (0, 0)$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Noter $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$, de matrice A dans la base canonique $(e) = e_1, e_2, e_3, e_4$.

Il faut trouver $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ tels que $\begin{cases} f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1, & f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3, & f(\varepsilon_4) = \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \end{cases}$

On sera amené à considérer les puissances successives de $A - \mathrm{I}_4$.
On posera $\varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1)$, et on en déduira ε_3, puis ε_2 puis ε_1.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Vérifier que $f(\varepsilon_1) = 3\varepsilon_1$ et $f(\varepsilon_2) = -2\varepsilon_2$.
En déduire A^n grâce à l'égalité $A = PB^nP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} i & -2i \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Montrer que la matrice P de la famille (ε) dans la base (e) est inversible.
La matrice de f dans la base (ε) est $B = P^{-1}AP$.
On peut aussi remarquer que $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$, $f(\varepsilon_2) = 2\varepsilon_2$ et $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3$.
Donner l'expression de B^n (récurrence facile.)

En déduire que $A^n = PB^nP^{-1} = \begin{pmatrix} (n+2)2^{n-1} & -n2^{n-1} & n2^{n-1} \\ (n+2)2^{n-1} - 1 & 1 - n2^{n-1} & n2^{n-1} \\ 2^n - 1 & 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix}$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.