Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Calculer le rang de la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2^2 & \dots & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & \dots & (n+1)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^2 & (n+1)^2 & \dots & (2n)^2 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Calculer le rang de la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 75 & 0 & 116 & 39 & 0 \\ 171 & -69 & 402 & 123 & 45 \\ 301 & 0 & 87 & -417 & -169 \\ 114 & -46 & 268 & 82 & 30 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Calculer le rang de la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $\varepsilon_1 = (1, 1, 1, 0)$, $\varepsilon_2 = (2, 1, 1, 1)$, $\varepsilon_3 = (1, 0, 1, 2)$ et $\varepsilon_4 = (1, -1, -1, 1)$.

Montrer que $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ forment une base de $\mathbb{R}^4$.

Calculer les coordonnées du vecteur $v = (1, 2, 3, 4)$ dans cette base.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

On pose $\begin{cases} u_1 = (1, -1, 2, 3, 4) & u_2 = (2, 1, -1, 2, 0) \quad u_3 = (-1, 2, 1, 1, 3) \\ u_4 = (1, 5, -8, -5, -12) & u_5 = (3, -7, 8, 9, 13) \end{cases}$

Déterminer le rang de la famille u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 et former un système d'équations du sous-espace de $\mathbb{R}^5$ qu'ils engendrent.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Observer que le terme général de A s'écrit $a_{ij} = (j-1)^2 + 2i(j-1) + i^2$.
En déduire des égalités $\mathrm{L}_i = U + 2iV + i^2 W$, puis que rang $A \le 3$.
Traiter enfin les cas particuliers $n = 1$, $n = 2$, puis $n \ge 3$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Constater que $\mathrm{L}_2 = \frac{3}{2}\mathrm{L}_4$, puis retirer L_2.
Une simple permutation des colonnes suffit à obtenir une matrice échelonnée.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Le rang de la matrice A est égal à 3.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Montrer que la matrice P de la famille (ε) dans la base canonique est inversible et calculer son inverse par la méthode du pivot.
Utiliser enfin que la colonne des coordonnées de v dans (ε) est reliée à la colonne des coordonnées de v dans (e) par $[v]_e = P[v]_\varepsilon$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Former la matrice A de la famille $u_1, \ldots, u_5$ dans la base canonique.
Border A à droite par la colonne des coordonnées d'un vecteur $v = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.
Procéder à des opérations élémentaires sur les lignes de B.
Justifier que v appartient au sous-espace engendré par $u_1, \ldots, u_5 \Leftrightarrow$ rang $A =$ rang B.
On trouve rang $A = 3$, puis : $v(x_1, \ldots, x_5) \in \mathrm{Im}\, A \Leftrightarrow \begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 7x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$