Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Déterminer le rang de la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$, où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Préciser si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$ est inversible, et calculer dans ce cas son inverse.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ les formes linéaires définies sur $\mathbb{K}^3$ par, pour tout $u = (x, y, z)$:
$\varphi_1(u) = x + 2y + 3z$, $\varphi_2(u) = 2x + 5y + 4z$, $\varphi_3(u) = x + 3y + 2z$.

1. Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $(\mathbb{K}^3)^*$.
2. Trouver la base duale (u_1, u_2, u_3).

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Sur $E = \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ on définit les applications $f_j : P \to \displaystyle\int_0^1 t^j P(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la famille $(\varepsilon^*) = f_0, f_1, f_2, f_3$ est une base de E^*.
2. Déterminer de quelle base (ε) de E c'est la base duale.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^4$, de matrice A dans la base canonique.

1. Donner une base du noyau de f. Quel est le rang de f ?
2. Donner une équation cartésienne de l'image de f.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Traiter les cas particuliers $(a = b = 0)$ et $(a = 0 \neq b)$.
Si $a \neq 0$: montrer que $\operatorname{rang} A = 4$ si $b^4 \neq a^4$ et $\operatorname{rang} A = 3$ sinon.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

La matrice A est inversible si et seulement si a, b, c sont non nuls.

Son inverse est alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & -1/a & -1/b & -1/c \\ -1/a & 1/a & 0 & 0 \\ -1/b & 0 & 1/b & 0 \\ -1/c & 0 & 0 & 1/c \end{pmatrix}$ avec $\alpha = 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

1. Montrer que la matrice A de la famille $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ dans (e^*) est inversible.
2. Poser $u(x, y, z)$ et $u'(x', y', z') = (f(u), g(u), h(u))$.
   Constater alors que $(x \quad y \quad z) = (x' \quad y' \quad z')A^{-1}$.
   En déduire $u_1 = (-2, 0, 1)$, $u_2 = (5, -1, -1)$ et $u_3 = (-7, 2, 1)$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Pour tout indice i, remarquer que $f_j(\mathrm{X}^i) = \dfrac{1}{i + j + 1}$.

En déduire que la matrice A de la famille (ε^*) dans (e^*) est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}$

1. Utiliser la méthode du pivot pour trouver A^{-1}.
2. Si $P = a + b\mathrm{X} + c\mathrm{X}^2 + d\mathrm{X}^3$, soit $\varphi(P)$ la matrice-ligne $(f_0(P) \ f_1(P) \ f_3(P) \ f_4(P))$.
   Constater que $(a \ b \ c \ d) = \varphi(P)A^{-1}$.
   En déduire $\varepsilon_0 = 16 - 120\mathrm{X} + 240\mathrm{X}^2 - 140\mathrm{X}^3$ (première ligne de A^{-1}).
   Trouver de même $\begin{cases} \varepsilon_2 = 240 - 2700\mathrm{X} + 6480\mathrm{X}^2 - 4200\mathrm{X}^3 \\ \varepsilon_3 = -140 + 1680\mathrm{X} - 4200\mathrm{X}^2 + 2800\mathrm{X}^3 \end{cases}$

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

On applique la méthode du pivot. On trouve $\operatorname{rang} A = 3$.

Le noyau est la droite engendrée par $(2, 0, 1, -1)$.

Le vecteur (x, y, z, t) est dans $\operatorname{Im} f \Leftrightarrow 2x + 11y + 5z - 8t = 0$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.