Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & \dots & \dots & n^2 \end{vmatrix}$

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Calculer $D(m,p) = \begin{vmatrix} \mathrm{C}_m^0 & \mathrm{C}_m^1 & \dots & \mathrm{C}_m^p \\ \mathrm{C}_{m+1}^0 & \mathrm{C}_{m+1}^1 & \dots & \mathrm{C}_{m+1}^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{C}_{m+p}^0 & \mathrm{C}_{m+p}^1 & \dots & \mathrm{C}_{m+p}^p \end{vmatrix}$ (d'ordre $p+1$, avec $m \geq p$)

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & b_n & \dots & b_n & a_n+b_n \end{vmatrix}$

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} p+q & p & \dots & p \\ q & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & p \\ q & \dots & q & p+q \end{vmatrix}$ (d'ordre n)

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Constater que chaque ligne L_i s'écrit : $L_i = n(i-1)(1,1,\dots,1) + (1,2,\dots,n)$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Notons $L_0, \dots, L_p$ les lignes et $C_0, \dots, C_p$ les colonnes.
Effectuer les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$, de $i = p$ à $i = 1$.
En déduire que $D_{m,p} = D_{m,p-1}$. Prouver finalement que $D_{m,p} = 1$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Noter $(e) = e_1, e_2, \dots, e_n$ la base canonique, et poser $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Remarquer que $D_n = \det(a_1e_1 + b, a_2e_2 + b, \dots, a_ne_n + b)$.

Développer en utilisant la n-linéarité. On trouve $D_n = \prod_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j \left(\prod_{i \neq j} a_i \right)$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

De $j = n$ à $j = 2$ soustraire C_{j-1} à C_j. De $i = n$ à $i = 2$ soustraire L_{i-1} à L_j.
Développer enfin par rapport à la dernière ligne.

On trouve $D_n = q^n + pD_{n-1}$, puis $D_n = \sum_{k=0}^{n} p^k q^{n-k}$ (récurrence).

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Pour i allant de 2 à $n+1$, effectuer $C_i \leftarrow C_i + C_{i-1}$.

On trouve $D_{n+1} = (-1)^n(n+1) \prod_{k=1}^{n} a_k$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.