

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D_n(x) = \begin{vmatrix} a_1^2 - x & a_1 a_2 & \dots & \dots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 - x & a_2 a_3 & \dots & a_2 a_n \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 - x & \dots & a_3 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \dots & a_n a_{n-1} & a_n^2 - x \end{vmatrix}$

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D_p = \begin{vmatrix} C_1^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ C_2^2 & C_2^1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & C_{p-1}^1 & 1 \\ C_p^p & C_p^{p-1} & \dots & C_p^2 & C_p^1 \end{vmatrix}$

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} C_{n+1}^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ C_{n+2}^2 & C_{n+2}^1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & C_{n+p-1}^1 & 1 \\ C_{n+p}^p & C_{n+p}^{p-1} & \dots & C_{n+p}^2 & C_{n+p}^1 \end{vmatrix}$

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (d'ordre $n \geq 3$)

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & n \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \dots & n & n \end{vmatrix}$



Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [[Retour à l'énoncé](#)]

Noter $u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ et considérer la base canonique $(e) = e_1, \dots, e_n$.

Développer $D_n(x) = \det(a_1u - xe_1, \dots, a_ju - xe_j, \dots, a_nu - xe_n)$ par n -linéarité.

On trouve $D_n(x) = (-x)^{n-1} \left(\sum_{j=1}^n a_j^2 - x \right)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [[Retour à l'énoncé](#)]

Effectuer $L_{i+1} \leftarrow L_{i+1} - L_i$ de $i = p - 1$ à $i = 1$. En déduire $D_p = D_{p-1}$, puis $D_p = 1$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [[Retour à l'énoncé](#)]

Si $n = 0$, utiliser le résultat de l'exercice précédent.

Sinon effectuer $L_{i+1} \leftarrow L_{i+1} - L_i$ de $i = p - 1$ à $i = 1$.

En déduire la relation $D_p^n = D_p^{n-1} + D_{p-1}^n$.

Par récurrence, prouver que $D_p^n = C_{n+p-1}^n$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [[Retour à l'énoncé](#)]

Développer par rapport à la première colonne. On trouve $D = 1 - (-1)^n$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [[Retour à l'énoncé](#)]

On retranche la dernière colonne à toutes les autres. On trouve $D = (-1)^{n-1} n!$.