Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Calculer $D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_0 & \cos 2\theta_0 & \ldots & \cos n\theta_0 \\ 1 & \cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 & \ldots & \cos n\theta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos\theta_n & \cos 2\theta_n & \ldots & \cos n\theta_n \end{vmatrix}$

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $\Delta_n(\theta)$ de $A_n = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ avec : $\begin{cases} a_{ii} = 2 \\ a_{i-1,j} = a_{i+1,j} = \cos\theta \\ a_{ij} = 0 \text{ dans les autres cas} \end{cases}$

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} = |\det(A + iB)|^2$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soient A, B, C trois matrices carrées d'ordre n.

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 0 & B \\ A & C \end{vmatrix}$ en fonction des déterminants de A et de B.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Justifier l'existence d'un polynôme P_m, de degré m, tel que $\cos m\theta = P_m(\cos\theta)$.
Vérifier que le coefficient dominant de P_m est 2^{m-1}.
Montrer que par soustractions successives de colonnes, le déterminant D_{n+1} se ramène à un déterminant de Van Der Monde. En déduire $D_{n+1} = 2^{\frac{(n-1)n}{2}} \prod_{0\le i<j\le n} (\cos\theta_j - \cos\theta_i)$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Développe $\Delta_n(\theta)$ par rapport à sa première ligne.

En déduire $\Delta_n(\theta) = 2\Delta_{n-1}(\theta) - \cos^2\theta\Delta_{n-2}(\theta)$.

– Si $\sin\theta \neq 0$, on trouve $\Delta_n(\theta) = \dfrac{(1+\sin\theta)^{n+1} - (1-\sin\theta)^{n+1}}{2\sin\theta}$.

– Si $\theta = k\pi$, on trouve $\Delta_n(k\pi) = n+1$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Pour $j \in \{1,\ldots,n\}$, ajouter C_{n+j} à C_j.
Pour i allant de 1 à n, ajouter ensuite L_{n+i} à L_i.
On trouve $D_{2n} = 1$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Pour k dans $\{1,\ldots,n\}$, effectuer $\mathrm{C}_k \leftarrow \mathrm{C}_k + i\mathrm{C}_{n+k}$.
Pour tout k compris entre 1 et n, effectuer $\mathrm{L}_{n+k} \leftarrow \mathrm{L}_{n+k} - i\mathrm{L}_k$.
En déduire $D_{2n} = \det(A+iB)\det(A-iB)$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Pour tout i de $\{1,\ldots,n\}$, échanger L_i et L_{n+i}.
On trouve $D_{2n} = (-1)^n \det A \det B$.