Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

On définit une application f 2π-périodique et impaire par : $\begin{cases} 0 < t < \pi \Rightarrow f(t) = 1 \\ f(0) = f(\pi) = 0 \end{cases}$

1. Former le développement en série de Fourier de f.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
3. A l'aide de l'égalité de Parseval, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ puis $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

On définit une application f, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, par $\begin{cases} \forall t \in]-\pi, \pi[, f(t) = t \\ f(-\pi) = f(\pi) = 0 \end{cases}$

1. Former le développement en série de Fourier de f.
2. A l'aide de l'égalité de Parseval, calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
3. On définit g, 2π-périodique, par par $g(x) = \dfrac{\pi - t}{2}$ sur $]0, 2\pi[$ et $g(0) = g(2\pi) = 0$.

   Déduire de la question (1) le développement en série de Fourier de g.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

On définit une application f, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, par $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = |x|$.

1. Former le développement en série de Fourier de f.
2. En déduire les sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
3. Avec l'identité de Parseval, calculer les sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Développer $f(x) = |\sin x|$ en série de Fourier. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1-4n^2}$ et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, impaire, 2π-périodique, définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux.
2. Former le développement en série de Fourier de f. En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.
3. Calculer les sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

1. On trouve : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$.
2. Se placer au point $x = \frac{\pi}{2}$.
3. L'égalité de Parseval donne $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

1. On trouve : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$.
2. L'égalité de Parseval donne l'égalité bien connue $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
3. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2} f(\pi - x)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

1. On trouve $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.
2. Se placer en $x = 0$. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, puis $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
3. Parseval donne $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

1. On obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2nx}{1-4n^2}$.
2. En choisissant x, trouver $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1-4n^2} = -\frac{1}{2}$ puis $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

- On trouve : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}$. Se placer en $x = \frac{\pi}{2}$.
- Parseval donne $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$. On en déduit $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$.