Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, paire, 2π-périodique, définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = x^2(\pi - x)^2$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^3$ par morceaux.
2. Développer f en série de Fourier. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^8}$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit t un réel non entier. Soit f, 2π-périodique, définie par : $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = \cos(tx)$.

1. Former le développement en série de Fourier de f.
2. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $\dfrac{\pi}{\tan \pi t} = \dfrac{1}{t} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2}$.
3. Par dérivation terme à terme, en déduire : $\forall t \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi t)}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit t un nombre réel. On suppose que t n'est pas un entier relatif.

On définit une application f, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, par : $\forall x \in]0, 2\pi[$, $f(x) = \mathrm{e}^{itx}$.

1. Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de f.
2. En utilisant l'identité de Parseval, montrer que $\forall t \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $\displaystyle\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t-p)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi t)}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit $f \in \mathcal{E}_{2\pi}$. Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n} c_n(f)$ est absolument convergente.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit λ un réel non nul de $]-1, 1[$. Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2\lambda \cos x + \lambda^2}$.

1. Montrer que la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$. Ecrire l'égalité qui en résulte, sans chercher à calculer les $a_n(f)$ (qu'on notera simplement a_n).
2. (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\lambda a_{n+1} - (1 + \lambda^2) a_n + \lambda a_{n-1} = 0$.

   (b) En déduire l'existence de deux réels α et β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \alpha \lambda^n + \dfrac{\beta}{\lambda^n}$.

   (c) Montrer $\beta = 0$. Calculer a_0 et en déduire l'expression de a_n.
3. En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in]-1, 1[$, $\dfrac{1 - \lambda^2}{1 - 2\lambda \cos x + \lambda^2} = 1 + 2 \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \cos nx$
4. Retrouver ce résultat en utilisant un développement en série entière.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Justifier l'égalité $f(x) \equiv \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nx)$. Montrer que $a_0(f) = \frac{\pi^4}{15}$.

Après quatre intégrations par parties, on trouve $a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = -\frac{48}{(2n)^4} = -\frac{3}{n^4}$.

Choisir x, on trouve $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720}$. Parseval donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

– On obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sin \pi t}{\pi t} + \frac{2t \sin \pi t}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{t^2 - n^2}$.

– Choisir $x = \pi$. Pour tout $n \geq 1$, définir l'application $t \mapsto \varphi_n(t) = \frac{2t}{t^2 - n^2}$.

Vérifier qu'on peut appliquer le théorème de dérivation des séries de fonctions.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

On trouve : $\forall p \in \mathbb{Z}, c_p(f) = \frac{e^{i\pi t} \sin \pi t}{\pi(t-p)}$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Justifier l'inégalité $\frac{1}{n}|c_n(f)| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |c_n(f)|^2\right)$ et utiliser un résultat du cours.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

1. Justifier que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$.
2. (a) Constater que $\lambda \cos(n+1)x - (1+\lambda^2)\cos nx + \lambda \cos(n-1)x = -\frac{\cos nx}{f(x)}$.
   (b) Résultat du cours sur les récurrences linéaires d'ordre 2.
   (c) Utiliser le fait (connue) que la suite (a_n) est convergente vers 0.
   Poser $t = \tan\frac{x}{2}$, puis $t = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}u$. En déduire $a_0 = \frac{2}{1-\lambda^2}$.
3. C'est une conséquence immédiate du développement en série de Fourier de f.
4. Fixer x et décomposer $g(\lambda) = \frac{1-\lambda^2}{1 - 2\lambda\cos x + \lambda^2}$ en éléments simples.
   Utiliser le DSE de $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ pour $|z| < 1$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

1. L'application f est π-périodique, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}-\pi\mathbb{Z}$. Sur $]0,\pi[$, on a :
$$f(x)=\pi^2x^2-2\pi x^3+x^4,\quad f'(x)=2\pi^2x-6\pi x^2+4x^3,\quad f''(x)=2\pi^2-12\pi x+12x^2$$
On constate que $\lim\limits_{0^+}f=\lim\limits_{\pi^-}f=0$, $\lim\limits_{0^+}f'=\lim\limits_{\pi^-}f'=0$ et $\lim\limits_{0^+}f''=\lim\limits_{\pi^-}f''=2\pi^2$.
Or les applications f, f', f'' sont π-périodiques.
Donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et : $\forall k\in\mathbb{Z}, f(k\pi)=0,\ f'(k\pi)=0,\ f''(k\pi)=2\pi^2$.
L'application $f^{(3)}$ est définie sur $\mathbb{R}-\pi\mathbb{Z}$ et π-périodique.
Sur $]0,\pi[$, $f^{(3)}(x)=-12\pi+24x$. Ainsi $\lim\limits_{0^+}f^{(3)}=-12\pi$ et $\lim\limits_{0^-}f^{(3)}=12\pi$.
L'application f est donc de classe $\mathcal{C}^3$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2. f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Le théorème de convergence normale s'applique : la série de Fourier de f est CVN vers f sur $\mathbb{R}$.
L'application f étant paire, sa série de Fourier est une série de "cosinus".
Donc $f(x)\equiv\dfrac{1}{2}a_0(f)+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(f)\cos(nx)$, avec : $\forall n\in\mathbb{N}, a_n(f)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t$.
En particulier, $a_0(f)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi(\pi^2t^2-2\pi t^3+t^4)\,\mathrm{d}t=\dfrac{2}{\pi}\Big(\dfrac{\pi^5}{3}-\dfrac{\pi^5}{2}+\dfrac{\pi^5}{5}\Big)=\dfrac{\pi^4}{15}$.
Pour calculer a_n avec $n\geq1$ on procède à quatre intégrations par parties successives.
Posons :
$$g^{(4)}(x)=\cos nx, g^{(3)}(x)=\frac{\sin nx}{n}, g''(x)=-\frac{\cos nx}{n^2}, g'(x)=-\frac{\sin nx}{n^3}, g(x)=\frac{\cos nx}{n^4}$$
Pour tout entier $n\geq1$:
$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t &= \int_0^\pi f(t)g^{(4)}(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \underbrace{\big[f(t)g^{(3)}(t)\big]_0^\pi}_{=0}-\int_0^\pi f'(t)g^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t=-\int_0^\pi f'(t)g^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t\\ &= -\underbrace{[f'(t)g''(t)]_0^\pi}_{=0}+\int_0^\pi f''(t)g''(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^\pi f''(t)g''(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \underbrace{[f''(t)g'(t)]_0^\pi}_{=0}-\int_0^\pi f^{(3)}(t)g'(t)\,\mathrm{d}t=-\int_0^\pi f^{(3)}(t)g'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= -\big[f^{(3)}(t)g(t)\big]_0^\pi+\int_0^\pi f^{(4)}(t)g(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{-12\pi}{n^4}(1+(-1)^n)+\frac{24}{n^4}\underbrace{\int_0^\pi\cos nt\,\mathrm{d}t}_{=0}\end{aligned}$$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.