CH.17 : MECANIQUE DU SOLIDE

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

****

****

I. CINEMATIQUE DU SOLIDE

I.1. DISTRIBUTION DES VITESSES DANS UN SOLIDE

- Soient (R) un référentiel quelconque, M_1 et M_2 deux points d'un solide (S) ; on montre que :

$$\boxed{\vec{v}_{M_2 \in S/R} = \vec{v}_{M_1 \in S/R} + \overrightarrow{M_2 M_1} \wedge \vec{\omega}_{S/R}}$$

où : $\vec{\omega}_{S/R}(t)$ est le « **vecteur vitesse instantanée de rotation** » de (S) par rapport à (R).

- **Exemples :** ♦ *translation* : $\vec{\omega}_{S/R} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_{M_2/R} = \vec{v}_{M_1/R}}$

♦ *rotation autour d'un axe FIXE passant par* M_1 : $\vec{v}_{M_1/R} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{M_2/R} = \vec{\omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{M_1 M_2}}$

 Christian MAIRE

I.2. MOMENT CINETIQUE D'UN SOLIDE AYANT UN POINT DE VITESSE NULLE

• Soit O le point fixe ; M est un point quelconque du solide et $\vec{\omega}_{S/R}$ le vecteur rotation instantanée ;en généralisant la définition du chapitre 14 à une distribution **continue** de masse, on peut écrire :

$$\boxed{\vec{\sigma}_{o/R} = \iiint_{M\in S} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}_{M/R} dm = \iiint_{M\in S} \overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{\omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{OM}\right) dm}$$

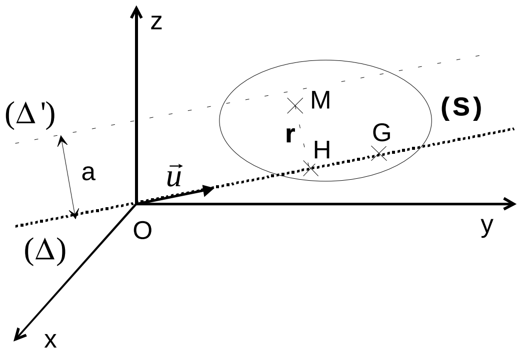
• Cette relation définit une **application LINEAIRE** de l'espace vectoriel des **rotations** dans l'espace vectoriel des **moments cinétiques**.
Cette application est susceptible d'une représentation **matricielle** :

$\boxed{(\sigma_{o/R}) = [J_o](\omega_{o/R})}$ où : $[J_o]$ est la « **matrice d'inertie** », symétrique, du solide (S) en O.

Rq1 : cette relation montre, qu'en général, le moment cinétique **n'est pas colinéaire** au vecteur rotation instantanée.
Rq2 : la notion de matrice d'inertie (sa diagonalisation, l'existence d'axes principaux d'inertie…) n'est pas au programme : elle permet cependant de justifier les relations obtenues dans les paragraphes suivants.

I.3. MOMENT D'INERTIE PAR RAPPORT A UN AXE

I.3.1. Définition



On note J_Δ le moment d'inertie du solide (S) par rapport à un axe (Δ) passant par O.
$\vec{u}$ est un vecteur **unitaire** de cet axe; on pose:

$$\boxed{J_\Delta = \iiint_{M\in S} HM^2 \times dm = \iiint_{M\in S} r^2 \times dm} \qquad (J_\Delta \text{ est en } kg.m^2)$$

Rq : un moment d'inertie prend en compte la masse d'un solide (par l'intermédiaire de dm), mais également la manière dont cette masse se répartit (par l'intermédiaire de r^2).

I.3.2. Théorème de Huygens

Si l'on note J_G le moment d'inertie de (S) par rapport à un axe (Δ), passant par le centre d'inertie G du solide, alors on peut en déduire le moment d'inertie de (S) par rapport à un axe (Δ'), **parallèle** à (Δ) et distant de ce dernier de a, en écrivant :

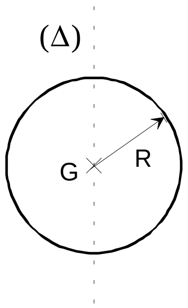
$$\boxed{J_{\Delta'} = J_G + ma^2}$$ (où m est la masse totale du solide)

Rq : le théorème de Huygens n'est pas explicitement au programme (mais pas interdit) ; dans la plupart des cas, nous verrons que l'on peut s'en dispenser et on lui préférera les 2 théorèmes de König.

I.3.3. Trois moments d'inertie « classiques »

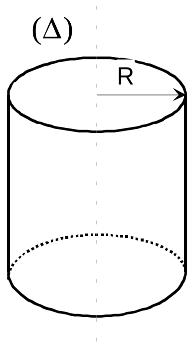
• **Remarque préliminaire :** les calculs de moment d'inertie ne sont pas au programme et doivent être fournis par l'énoncé ; dans le cas contraire, on se contentera de noter J_Δ le moment d'inertie du système par rapport à l'axe considéré.

• Les moments d'inertie suivants sont donnés à titre indicatif ; on notera M la masse des solides :



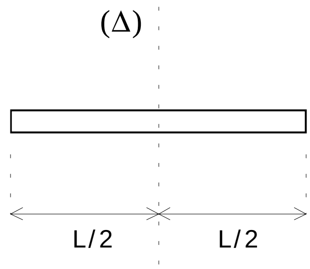
sphère pleine homogène

$$\boxed{J_\Delta = \frac{2}{5}MR^2}$$



cylindre plein homogène

$$\boxed{J_\Delta = \frac{1}{2}MR^2}$$



barre "mince" homogène

$$\boxed{J_\Delta = \frac{ML^2}{12}}$$

I.4. ENERGIE CINETIQUE D'UN SOLIDE AVEC UN POINT DE VITESSE NULLE

• $E_C = \frac{1}{2}(\iiint_{M\in S} v^2(M)dm = \frac{1}{2}\iiint_{M\in S}\vec{v}(M)\cdot\vec{v}(M)dm = \frac{1}{2}\iiint_{M\in S}\vec{v}(M)\cdot(\vec{\omega}_{S/R}\wedge\overrightarrow{OM})dm \Rightarrow$

$E_C = \frac{1}{2}\vec{\omega}_{S/R}\cdot\iiint_{M\in S}\overrightarrow{OM}\wedge\vec{v}(M)dm$ ($\vec{\omega}_{S/R}$ peut dépendre du temps, l'intégration se faisant selon les variables d'espace) ; on reconnaît l'expression du moment cinétique, d'où :

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2}\vec{\omega}_{S/R}\cdot\vec{\sigma}_{o/R} = \frac{1}{2}\vec{\omega}_{S/R}\cdot[(J_o)\vec{\omega}_{S/R}]}$$

• En notant $\vec{u}$ un vecteur unitaire de **l'axe instantané de rotation** (Δ), on a : $\vec{\omega}_{S/R} = \omega_{S/R}\vec{u}$; le calcul montre que l'on a alors :

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2}J_\Delta\omega_{S/R}^2}$$

I.5. MOMENT CINETIQUE SCALAIRE

• On s'intéresse à la projection du moment cinétique vectoriel $\vec{\sigma}_{o/R}$ sur l'axe instantané de rotation ; avec les mêmes notations que précédemment, on a :

$\boxed{\sigma_{\Delta/R} = \vec{u}\cdot\vec{\sigma}_{o/R}}$ = « moment cinétique **scalaire** du solide (S) par rapport à l'axe (Δ) » (dans le référentiel (R))

• On montre que : $\boxed{\sigma_{\Delta/R}(t) = J_\Delta\times\omega_{S/R}(t)}$