Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Rayon de convergence R et somme S de la série entière $\sum_{n\geq 0} n^3 x^n$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Rayon de convergence R et somme S de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!} x^n$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Rayon de convergence R et somme S de la série entière $\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n^2-1}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Rayon de convergence R et somme S de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{nx^n}{(2n+1)!}$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Rayon de convergence R et somme S de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+4n-1}{n+2}\frac{x^n}{n!}$.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Rayon de convergence R et somme S de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{4n}}{4n+1}$.

Exercice 7 [Indication] [Correction]

Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{3n+2}$.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Le rayon de convergence est 1. Pour calculer la somme , procéder par dérivation de $\sum x^n$.
Décomposer X^3 sur la base $1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.
En déduire $S(x) = \dfrac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On a $R = +\infty$. Utiliser $n^3 = n+3n(n-1)+n(n-1)(n-2)$. En déduire $S(x) = (x+3x^2+x^3)\mathrm{e}^x$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

On a $R = 1$. Utiliser le DSE de $\ln(1-x)$ et la décomposition de $\dfrac{1}{X^2-1}$.
En déduire $S(x) = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{x} - x\Big)\ln(1-x) + \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4}$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Le rayon est $R = +\infty$. Considérer $T(x) = xS(x^2)$ et calculer $T'(x)$.
En déduire $S(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{ch}\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sh}\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Pour obtenir $S(x)$ sur $\mathbb{R}^{-*}$, poser $U(x) = xS(-x^2)$ et calculer $U'(x)$.
On trouve $S(x) = \dfrac{1}{2}\cos\sqrt{-x} - \dfrac{1}{2\sqrt{-x}}\sin\sqrt{-x}$ sur $\mathbb{R}^{-*}$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

On a $R = +\infty$. Poser $T(x) = x^2 S(x)$ et calculer $T'(x)$.
Chercher alors $T(x)$ sous la forme $T(x) = (ax^3+bx^2+cx+d)\mathrm{e}^x - d$.
En déduire $S(x) = \Big(x + 2 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{5}{x^2}\Big)\mathrm{e}^x - \dfrac{5}{x^2}$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Le rayon vaut 1. Poser $T(x) = xS(x)$. Trouver $T'(x)$ puis $T(x)$.
On trouve finalement $S(x) = \dfrac{1}{4x}\ln\dfrac{1+x}{1-x} + \dfrac{1}{2x}\arctan x$.

Indication pour l'exercice 7 [Retour à l'énoncé]

On a $R = 1$. Poser $T(x) = x^2 S(x^3)$. Décomposer $T'(x)$ en éléments simples.
On trouve $S(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\Big(-\dfrac{1}{2}\ln(1-\sqrt[3]{x}) + \dfrac{1}{6}\ln(1-x) - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\Big(\dfrac{2\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{3}}\Big) + \dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}\Big)$.