Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Rayon de convergence, et somme, de la série entière $\sum a_n z^n$, avec $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (2 + (-1)^n)^n$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Rayon de convergence R et somme S de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{2n+1}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Rayon de convergence, et somme sur l'intervalle ouvert de convergence, de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n\theta}{n} x^n$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Rayon de convergence R et somme S de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ où $a_n = \dfrac{1}{n}\cos\Big(\dfrac{\pi}{4} + n\dfrac{\pi}{2}\Big)$.
NB : on donnera deux méthodes différentes.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

On considère une série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence 1, de somme $S(x)$.
On suppose que la série $\sum a_n$ est convergente, et on veut montrer que la série $\sum a_n x^n$ est uniformément convergente sur le segment $[0, 1]$.

1. Traiter le cas particulier où les a_n sont tous positifs ou nuls.
2. Traiter le cas où $a_n = (-1)^n \lambda_n$, la suite (λ_n) étant décroissante et convergente vers 0.
3. Traiter le cas général. On pourra poser $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ pour tout entier n.
4. Que peut on en déduire pour $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $[0, 1]$, et notamment pour $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$?

Exercice 6 [Indication] [Correction]

On pose $a_0 > 0$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
2. Montrer que la série entière converge en $x = -1$.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\Big)$. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n a_n = 2$. Conclusion ?

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Le rayon de convergence est égal à $\frac{1}{3}$. On trouve $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{x}{1-x^2} + \frac{1}{1-9x^2}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

On a $R = 1$. Poser $T(x) = xS(x^2)$ et calculer $T'(x)$.

En déduire $S(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ sur $]0,1[$. Sur $]-1,0[$, considérer $U(x) = xS(-x^2)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Poser $u_n(x) = \operatorname{Im} \frac{(xe^{i\theta})^n}{n}$. Montrer que $U'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \frac{\cos\theta - x}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$.

Obtenir finalement $\forall x \in]-1,1[,\ U(x) = -\frac{1}{2}\ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

- On a $a_n = \operatorname{Re} b_n$, avec $b_n = \frac{1+i}{n\sqrt{2}} i^n$. Montrer que $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(ix)^n$.
  Dériver $T(x)$, puis intégrer les parties réelle et imaginaire de $T'(x)$.
  En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\arctan x + \ln\sqrt{1+x^2})$.
- Calculer a_{2p} et a_{2p+1}. Séparer en deux séries et reconnaître deux séries classiques.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

3. Vérifier que $S_{n,p}(x) = \sum_{k=n+1}^{p} a_k x^k = r_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} r_k(x^{k+1} - x^k) - r_p x^p$.
   Montrer que la série $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$.
4. On en déduit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{x\to 1-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

1. Montrer que la suite (a_n) est convergente vers $\ell = 0$. En déduire $R = 1$.
2. Pour $x = -1$, utiliser le critère spécial des séries alternées.
3. Montrer que $a_n - \ln(1 + a_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{a_n^2}{2}$.
   Utiliser la convergence au sens de Césaro pour $u_n = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}}$.