# Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Rayon de convergence, et somme, de la série entière $\sum a_n z^n$, avec $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (2+(-1)^n)^n$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Rayon de convergence $R$ et somme $S$ de la série entière $\sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{2n+1}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Rayon de convergence, et somme sur l'intervalle ouvert de convergence, de $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\cos n\theta}{n} x^n$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Rayon de convergence $R$ et somme $S$ de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ où $a_n = \dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

NB : on donnera deux méthodes différentes.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

On considère une série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence 1, de somme $S(x)$.
On suppose que la série $\sum a_n$ est convergente, et on veut montrer que la série $\sum a_n x^n$ est uniformément convergente sur le segment $[0,1]$.

1. Traiter le cas particulier où les $a_n$ sont tous positifs ou nuls.
2. Traiter le cas où $a_n = (-1)^n \lambda_n$, la suite $(\lambda_n)$ étant décroissante et convergente vers 0.
3. Traiter le cas général. On pourra poser $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ pour tout entier $n$.
4. Que peut on en déduire pour $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $[0,1]$, et notamment pour $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ?

Exercice 6 [Indication] [Correction]

On pose $a_0 > 0$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$.

1. Déterminer le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum a_n x^n$.
2. Montrer que la série entière converge en $x = -1$.
3. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}\right)$. En déduire que $\lim_{n\to\infty} n a_n = 2$. Conclusion ?


©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

# Indications ou résultats

**Indication pour l'exercice 1** [Retour à l'énoncé]

Le rayon de convergence est égal à $\frac{1}{3}$. On trouve $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{x}{1-x^2} + \frac{1}{1-9x^2}$.

**Indication pour l'exercice 2** [Retour à l'énoncé]

On a $R = 1$. Poser $T(x) = xS(x^2)$ et calculer $T'(x)$.

En déduire $S(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ sur $]0,1[$. Sur $]-1,0[$, considérer $U(x) = xS(-x^2)$.

**Indication pour l'exercice 3** [Retour à l'énoncé]

Poser $u_n(x) = \operatorname{Im} \frac{(xe^{i\theta})^n}{n}$. Montrer que $U'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \frac{\cos\theta - x}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$.

Obtenir finalement $\forall x \in ]-1,1[,\ U(x) = -\frac{1}{2}\ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)$.

**Indication pour l'exercice 4** [Retour à l'énoncé]

– On a $a_n = \operatorname{Re} \mathrm{b_n}$, avec $b_n = \frac{1+i}{n\sqrt{2}}\, i^n$. Montrer que $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(ix)^n$.

Dériver $T(x)$, puis intégrer les parties réelle et imaginaire de $T'(x)$.

En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\arctan x + \ln\sqrt{1+x^2})$.

– Calculer $a_{2p}$ et $a_{2p+1}$. Séparer en deux séries et reconnaître deux séries classiques.

**Indication pour l'exercice 5** [Retour à l'énoncé]

3. Vérifier que $S_{n,p}(x) = \sum_{k=n+1}^{p} a_k x^k = r_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} r_k(x^{k+1} - x^k) - r_p x^p$.

   Montrer que la série $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

4. On en déduit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{x\to 1-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

**Indication pour l'exercice 6** [Retour à l'énoncé]

1. Montrer que la suite $(a_n)$ est convergente vers $\ell = 0$. En déduire $R = 1$.
2. Pour $x = -1$, utiliser le critère spécial des séries alternées.
3. Montrer que $a_n - \ln(1+a_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{a_n^2}{2}$.

   Utiliser la convergence au sens de Césaro pour $u_n = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}}$.


©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.