Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Trouver le développement en série entière de $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin(x)$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Trouver le développement en série entière de $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}\right)$, où $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Trouver le développement en série entière de $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Trouver le développement en série entière de $f(x) = \displaystyle\int_0^x \exp(t^2-x^2)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Trouver le développement en série entière de $f(x) = \ln(x^2-5x+6)$

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n n!^2}{(2n+1)!}\,x^{2n+1}$.

1. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?
2. Montrer que f satisfait à l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$.
3. En déduire une expression de f.

Exercice 7 [Indication] [Correction]

Développement en série entière de $f(x) = (\arcsin x)^2$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Utiliser $f(x) = \operatorname{Im} \mathrm{e}^{(i-1)x}$. En déduire $\mathrm{e}^{-x}\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n/2}}{n!} \sin\frac{3n\pi}{4} x^n$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Montrer que $f'(x) = \operatorname{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{i\alpha}}{1-x\mathrm{e}^{i\alpha}}\right)$. En déduire $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\alpha}{n} x^n$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Noter que $f(x) = \frac{1-x}{1-x^3}$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Montrer que $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2xf(x) + 1$.

Poser $y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$. On trouve $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ et $a_n = -\frac{2}{n} a_{n-2}$.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Au voisinage de 0, écrire $f(x) = \ln(2-x) + \ln(3-x)$.

En déduire $f(x) = \ln 2 + \ln 3 - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) \frac{x^n}{n}$ pour $|x| < 2$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

1. Le rayon de convergence de la série entière définissant f est 1.
2. Montrer que f est solution de $(1-x^2)y' - xy = 1$ sur $]-1,1[$.
3. Résoudre l'équation homogène, puis utiliser la méthode de variation de la constante.

   Trouver finalement : $\forall x \in]-1,1[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n n!^2}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

Indication pour l'exercice 7 [Retour à l'énoncé]

Montrer que $(1-x^2)f''(x) = 2 + xf'(x)$. En déduire $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n-1}(n-1)!^2}{(2n)!} x^{2n}$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.