



## Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Trouver le développement en série entière de  $f(x) = e^{-x} \sin(x)$ .

EXERCICE 2 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Trouver le développement en série entière de  $f(x) = \arctan\left(\frac{x \sin \alpha}{1 - x \cos \alpha}\right)$ , où  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

EXERCICE 3 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Trouver le développement en série entière de  $f(x) = \frac{1}{1 + x + x^2}$ .

EXERCICE 4 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Trouver le développement en série entière de  $f(x) = \int_0^x \exp(t^2 - x^2) dt$ .

EXERCICE 5 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Trouver le développement en série entière de  $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

EXERCICE 6 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n n!^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ .

1. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?
2. Montrer que  $f$  satisfait à l'équation différentielle  $(1 - x^2)y' - xy = 1$ .
3. En déduire une expression de  $f$ .

EXERCICE 7 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Développement en série entière de  $f(x) = (\arcsin x)^2$ .

## Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Utiliser  $f(x) = \operatorname{Im} e^{(i-1)x}$ . En déduire  $e^{-x} \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n/2}}{n!} \sin \frac{3n\pi}{4} x^n$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Montrer que  $f'(x) = \operatorname{Im} \left( \frac{e^{i\alpha}}{1 - xe^{i\alpha}} \right)$ . En déduire  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\alpha}{n} x^n$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Noter que  $f(x) = \frac{1-x}{1-x^3}$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Montrer que  $f(0) = 0$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2xf(x) + 1$ .

Poser  $y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ . On trouve  $a_1 = 1, a_2 = 0$  et  $a_n = -\frac{2}{n} a_{n-2}$ .

Finalement :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Au voisinage de 0, écrire  $f(x) = \ln(2-x) + \ln(3-x)$ .

En déduire  $f(x) = \ln 2 + \ln 3 - \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) \frac{x^n}{n}$  pour  $|x| < 2$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. Le rayon de convergence de la série entière définissant  $f$  est 1.
2. Montrer que  $f$  est solution de  $(1-x^2)y' - xy = 1$  sur  $] -1, 1[$ .
3. Résoudre l'équation homogène, puis utiliser la méthode de variation de la constante.

Trouver finalement :  $\forall x \in ] -1, 1[ \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n n!^2}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} \right.$

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Montrer que  $(1-x^2)f''(x) = 2 + xf'(x)$ . En déduire  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n-1}(n-1)!^2}{(2n)!} x^{2n}$ .