Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

A l'aide d'une série alternée, montrer que e est un irrationnel.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$, où $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(n!)^{1/n}}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit $\sum u_n$ une série réelle, convergente mais non absolument convergente.
Pour tout n, on pose $u_n^+ = \sup(u_n, 0)$ et $u_n^- = \sup(-u_n, 0)$.
Montrer que les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont divergentes.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Nature de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$, avec $u_n = \ln\left(\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+\alpha}}\right)$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit z un nombre complexe de module 1, mais tel que $z \neq 1$.

1. Pour tout entier n, on pose $T_n = \sum_{k=0}^{n} z^k$. Montrer que $|T_n| \leq \dfrac{2}{|1-z|}$.
2. En déduire que pour $N \geq 1$ et $p \geq 1$, on a : $\left|\sum_{n=N+1}^{N+p} \dfrac{z^n}{n}\right| \leq \dfrac{4}{(N+1)\,|1-z|}$.
3. Montrer que la série $\sum \dfrac{z^n}{n}$ est convergente.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Pour tout complexe z vérifiant $|z| < 1$, calculer $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, avec $u_n = nz^n$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.