Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Sachant que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Pour tout x de $]-1,1[$, montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

1. Calculer la limite quand n tend vers l'infini de $s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.
2. Retrouver ainsi la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Nature et somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{2n\pi}{3}$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Nature et somme de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$, $n \geq 0$.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Nature et somme de la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$, $n \geq 2$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Poser $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$, $T_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n-1)^2}$ et $U_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Vérifier que $S_{2N} = \frac{1}{4}S_N + T_N$ et que $U_{2N} = \frac{1}{4}S_N - T_N$.

En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Poser $\varphi_N(x) = \ln(1-x) + \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n}$ sur $]-1,1[$.

Avec l'inégalité des accroissements finis, montrer que $|\varphi_N(x)| =\leq \frac{|x|^{N+1}}{1-|x|}$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

1. Utiliser une somme de Riemann. On trouve $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \ln 2$.
2. Montrer que si $n \geq 1$, $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = s_n$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Vérifier que $S_{3N} = -\frac{1}{2} \sum_{n=N+1}^{3N} \frac{1}{n}$, puis (somme de Riemann) que $\lim_{N\to\infty} S_{3N} = -\frac{1}{2}\ln 3$.

Obtenir finalement l'égalité $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos\frac{2n\pi}{3} = -\frac{1}{2}\ln 3$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Évoquer tout d'abord le critère spécial des séries alternées.

Prouver que $S_N = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. En déduire $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Remarquer que $u_{2n} + u_{2n+1} = 0$. En déduire $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 0$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.