Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Etudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \dfrac{n(x^3+x)}{nx+1}\,\mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Etudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions (f_n) définie par :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = n^k x^2 \mathrm{e}^{-nx}$, où k est un réel donné.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Etudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions (f_n) définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \dfrac{n^3 x}{n^4 + x^4}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, lipschtiziennes de même rapport $M \geq 0$.

On suppose que la suite (f_n) est simplement convergente sur $[a, b]$, vers une application f.

Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Etudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions (f_n) définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+x^n)}$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

– Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est CVS sur $\mathbb{R}^+$ vers $f : x \mapsto \begin{cases} (x^2+1)\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

– Il n'y a pas CVU sur $[0, a]$, pour tout $a > 0$.
Montrer qu'il y a CVU sur $[a, +\infty[$.
On montrera que $\forall x \geq a > 0,\ 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{\mathrm{e}(na+1)}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

– Se limiter à $x \geq 0$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est CVS sur $\mathbb{R}^+$ vers 0.

– Étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}^+$.
Montrer que si $k < 2$, il y a CVU sur $\mathbb{R}^+$ vers 0.
Si $k \geq 2$, montrer qu'il y a CVU sur tout intervalle $[a, +\infty[$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

– Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est simplement convergente, sur $\mathbb{R}^+$, vers la fonction nulle.
– Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
Montrer qu'il y a CVU vers 0 sur tout intervalle $[0, a]$, avec $a > 0$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

– On traite le cas particulier $f = 0$.
Se donner $\varepsilon > 0$ et une subdivision (x_k) de $[a, b]$ de pas inférieur à ε.
En déduire qu'il existe n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x)| \leq (M+1)\varepsilon$.

– Dans le cas général, montrer que f est M-lispchitzienne sur $[a, b]$.
Considérer alors les applications $g_n = f - f_n$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Sur $[0, 1]$, minorer $1 + x^n$ par 1. Sur $[1, +\infty[$, minorer $1 + x^n$ par x^n.