Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Montrer que si la suite de fonctions (f_n) est uniformément convergente, il en est de même de la suite de fonctions $(g_n = \sin f_n)$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, et telle que $f(1) = 0$.

On définit les applications f_n sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n f(x)$.

Étudier la convergence de la suite (f_n).

Exercice 3 [Indication] [Correction]

On définit une suite de polynômes (P_n) par : $P_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(x - P_n^2)$.

1. Montrer que $P_{n+1} - \sqrt{x} = (P_n - \sqrt{x})\left(1 - \frac{P_n + \sqrt{x}}{2}\right)$
2. Exprimer de même $P_{n+1} + \sqrt{x}$ en fonction de $P_n + \sqrt{x}$.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1]$ $\sqrt{x} \leq P_{n+1}(x) \leq P_n(x) \leq 1$.
4. Montrer que la suite (P_n) est simplement convergente, sur $[0,1]$ vers $f : x \to \sqrt{x}$.
5. Préciser la monotonie des applications $x \to P_n(x) - \sqrt{x}$ et $x \to P_n(x) + \sqrt{x}$.
6. Montrer que la convergence de la suite (P_n) est uniforme.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ une suite de polynômes, tous de degré inférieur ou égal à m.

On suppose que la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ est simplement convergente sur un segment $[a,b]$, avec $a < b$, vers une application f. Montrer que f est aussi un polynôme de degré inférieur ou égal à m, et que la convergence de la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ est uniforme.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Justifier et utiliser l'inégalité : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |\sin x - \sin y| \leq |x-y|$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Se donner $\varepsilon > 0$, et $\alpha \in]0,1[$ tel que $x \in [1-\alpha, 1] \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon$.

Montrer que la suite (f_n) est uniformément convergente vers la fonction nulle.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

- On trouve $P_{n+1} + \sqrt{x} = P_n + \sqrt{x}) \left(1 - \dfrac{P_n - \sqrt{x}}{2}\right)$.
- Pour la question 3, procéder par récurrence.

  Si c'est vrai au rang n, vérifier que $P_{n+1}(x) \leq P_n(x) \leq 1$ et $\dfrac{P_n(x) + \sqrt{x}}{2} \leq 1$.
- Utiliser un théorème de convergence des suites monotones.

  Passer à la limite dans la relation de récurrence définissant les P_n.
- Procéder par récurrence.

  Montrer que $x \to \varphi_n(x) = P_n(x) + \sqrt{x}$ est croissante.

  De même, montrer que $x \to \psi_n(x) = P_n(x) - \sqrt{x}$ est décroissante.
- Utiliser l'encadrement $0 \leq P_n(x) - \sqrt{x} \leq P_n(0)$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

L'idée est d'utiliser l'interpolation de Lagrange pour $m+1$ points distincts de $[a,b]$.

Se donner $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ distincts dans $[a,b]$.

Noter $L_0, L_1, \ldots, L_m$ les polynômes interpolateurs associés aux λ_k.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} P_n(\lambda_k) L_k(x)$.

Faire tendre n vers $+\infty$, à x fixé, et constater que $f = \lim P_n$ est un polynôme de degré $\leq m$.

Justifier l'existence de $M \in \mathbb{R}^+$, tel que : $\forall k \in \{0,\ldots,m\}, \forall x \in [a,b], |L_k(x)| \leq M$.

En déduire que sur $[a,b]$ on a $|f(x) - P_n(x)| \leq M \displaystyle\sum_{k=0}^{m} |f(\lambda_k) - P_n(\lambda_k)|$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.