Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Montrer que si la suite de fonctions (f_n) est uniformément convergente, il en est de même de la suite de fonctions $(g_n = \sin f_n)$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, et telle que $f(1) = 0$.

On définit les applications f_n sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n f(x)$.

Étudier la convergence de la suite (f_n).

Exercice 3 [Indication] [Correction]

On définit une suite de polynômes (P_n) par : $P_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = P_n + \dfrac{1}{2}(x - P_n^2)$.

1. Montrer que $P_{n+1} - \sqrt{x} = (P_n - \sqrt{x})\left(1 - \dfrac{P_n + \sqrt{x}}{2}\right)$
2. Exprimer de même $P_{n+1} + \sqrt{x}$ en fonction de $P_n + \sqrt{x}$.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1]$ $\sqrt{x} \leq P_{n+1}(x) \leq P_n(x) \leq 1$.
4. Montrer que la suite (P_n) est simplement convergente, sur $[0,1]$ vers $f : x \to \sqrt{x}$.
5. Préciser la monotonie des applications $x \to P_n(x) - \sqrt{x}$ et $x \to P_n(x) + \sqrt{x}$.
6. Montrer que la convergence de la suite (P_n) est uniforme.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ une suite de polynômes, tous de degré inférieur ou égal à m.

On suppose que la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ est simplement convergente sur un segment $[a,b]$, avec $a < b$, vers une application f. Montrer que f est aussi un polynôme de degré inférieur ou égal à m, et que la convergence de la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ est uniforme.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Justifier et utiliser l'inégalité : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Se donner $\varepsilon > 0$, et $\alpha \in]0,1[$ tel que $x \in [1-\alpha, 1] \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon$.

Montrer que la suite (f_n) est uniformément convergente vers la fonction nulle.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

- On trouve $P_{n+1} + \sqrt{x} = P_n + \sqrt{x})\left(1 - \dfrac{P_n - \sqrt{x}}{2}\right)$.
- Pour la question 3, procéder par récurrence.
  Si c'est vrai au rang n, vérifier que $P_{n+1}(x) \leq P_n(x) \leq 1$ et $\dfrac{P_n(x) + \sqrt{x}}{2} \leq 1$.
- Utiliser un théorème de convergence des suites monotones.
  Passer à la limite dans la relation de récurrence définissant les P_n.
- Procéder par récurrence.
  Montrer que $x \to \varphi_n(x) = P_n(x) + \sqrt{x}$ est croissante.
  De même, montrer que $x \to \psi_n(x) = P_n(x) - \sqrt{x}$ est décroissante.
- Utiliser l'encadrement $0 \leq P_n(x) - \sqrt{x} \leq P_n(0)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

L'idée est d'utiliser l'interpolation de Lagrange pour $m+1$ points distincts de $[a,b]$.

Se donner $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ distincts dans $[a,b]$.

Noter $L_0, L_1, \ldots, L_m$ les polynômes interpolateurs associés aux λ_k.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} P_n(\lambda_k) L_k(x)$.

Faire tendre n vers $+\infty$, à x fixé, et constater que $f = \lim P_n$ est un polynôme de degré $\leq m$.

Justifier l'existence de $M \in \mathbb{R}^+$, tel que : $\forall k \in \{0, \ldots, m\}, \forall x \in [a,b], |L_k(x)| \leq M$.

En déduire que sur $[a,b]$ on a $|f(x) - P_n(x)| \leq M \displaystyle\sum_{k=0}^{m} |f(\lambda_k) - P_n(\lambda_k)|$.