Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

On se donne une suite (P_n) de fonctions polynômiales à coefficients réels. On suppose que la suite (P_n) est uniformément convergente sur un intervalle I non borné de $\mathbb{R}$.

Montrer que la fonction limite P est un polynôme, et que les différences $P_n - P$ sont des polynômes constants à partir d'un certain entier n.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Etudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions (f_n) définie par :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = x^2 \exp(-\sin\dfrac{x}{n})$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ et $(g_n)_{n\geq 0}$ deux suites uniformément convergentes d'applications continues sur le segment $I = [a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Montrer que la suite $(f_n g_n)$ est CVU sur $[a, b]$.

Donner un contre-exemple montrant que la propriété est fausse si I n'est pas un segment.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Etudier la convergence de la suite (f_n) définie par : $\forall n \geq 1, \forall x \geq 0, f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Montrer qu'il existe m tel que $P_n - P_m$ soit égal à une constante λ_n pour $n \geq m$.

Montrer que la suite (λ_n) est convergente.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$, vers $f : x \to x^2$.

Montrer qu'il y a CVU sur toute partie bornée de $\mathbb{R}$ (accroissements finis.)

En choisissant $x = x_n = \frac{n\pi}{2}$, vérifier qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

- Utiliser $\|fg - f_n g_n\|_\infty =\leq \|f - f_n\|_\infty \|g\|_\infty + \|f_n\|_\infty \|g - g_n\|_\infty$.
- Considérer $f_n(x) = g_n(x) = x + \frac{1}{n}$ sur $I = \mathbb{R}$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

- Vérifier que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est CVS sur $\mathbb{R}^+$ vers $f : x \to \mathrm{e}^x$.
- En utilisant $x_n = n$, montrer qu'il n'y a pas CVU sur $\mathbb{R}^+$.
  On prouvera en revanche qu'il y a CVU sur $[0, a]$, pour tout $a > 0$.
  Pour cela, on considérera l'application $x \mapsto \varphi_n(x) = f(x) - f_n(x) = \mathrm{e}^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.
  On montrera que φ_n, qui est nulle en 0, est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.