



## Énoncés des exercices

### EXERCICE 1 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

On se donne une suite  $(P_n)$  de fonctions polynômiales à coefficients réels. On suppose que la suite  $(P_n)$  est uniformément convergente sur un intervalle  $I$  non borné de  $\mathbb{R}$ .

Montrer que la fonction limite  $P$  est un polynôme, et que les différences  $P_n - P$  sont des polynômes constants à partir d'un certain entier  $n$ .

### EXERCICE 2 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Etudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions  $(f_n)$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x^2 \exp\left(-\sin \frac{x}{n}\right).$$

### EXERCICE 3 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soient  $(f_n)_{n \geq 0}$  et  $(g_n)_{n \geq 0}$  deux suites uniformément convergentes d'applications continues sur le segment  $I = [a, b]$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Montrer que la suite  $(f_n g_n)$  est CVU sur  $[a, b]$ .

Donner un contre-exemple montrant que la propriété est fausse si  $I$  n'est pas un segment.

### EXERCICE 4 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Etudier la convergence de la suite  $(f_n)$  définie par :  $\forall n \geq 1, \forall x \geq 0, f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ .

## Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Montrer qu'il existe  $m$  tel que  $P_n - P_m$  soit égal à une constante  $\lambda_n$  pour  $n \geq m$ .

Montrer que la suite  $(\lambda_n)$  est convergente.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

La suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  est simplement convergente sur  $\mathbb{R}$ , vers  $f : x \rightarrow x^2$ .

Montrer qu'il y a CVU sur toute partie bornée de  $\mathbb{R}$  (accroissements finis.)

En choisissant  $x = x_n = \frac{n\pi}{2}$ , vérifier qu'il n'y a pas convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

– Utiliser  $\|fg - f_n g_n\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty \|g\|_\infty + \|f_n\|_\infty \|g - g_n\|_\infty$ .

– Considérer  $f_n(x) = g_n(x) = x + \frac{1}{n}$  sur  $I = \mathbb{R}$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

– Vérifier que la suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  est CVS sur  $\mathbb{R}^+$  vers  $f : x \rightarrow e^x$ .

– En utilisant  $x_n = n$ , montrer qu'il n'y a pas CVU sur  $\mathbb{R}^+$ .

On prouvera en revanche qu'il y a CVU sur  $[0, a]$ , pour tout  $a > 0$ .

Pour cela, on considérera l'application  $x \mapsto \varphi_n(x) = f(x) - f_n(x) = e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ .

On montrera que  $\varphi_n$ , qui est nulle en 0, est croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .