Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Etudier la convergence et calculer la somme de la série de fonctions $\sum f_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = n\,x^2 \mathrm{e}^{-nx}$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

On considère la série de fonctions $\sum f_n$, avec : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,\pi]$, $f_n(x) = \sin x \cos^n x$.

1. Montrer que la série $\sum f_n$ est simplement convergente sur $[0,\pi]$.
2. Justifier rapidement pourquoi la convergence n'est pas uniforme sur $[0,\pi]$.
3. Prouver qu'il y a convergence normale sur $[a,\pi-a]$, avec $0<a<\frac{\pi}{2}$.
4. Calculer le reste d'indice N de $\sum f_n$ et montrer que celle-ci n'est pas CVU sur $]0,\pi]$.
5. Montrer qu'il y a convergence uniforme (mais pas normale) sur $[a,\pi]$, avec $0<a<\pi$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

On considère la série $\sum f_n$, où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{(n+x)^2}$.

1. Etudier la convergence de cette série sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que la somme S de cette série est continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. Prouver que l'application S est décroissante et positive sur $\mathbb{R}^+$.
4. Préciser la valeur de l'application S à l'origine, et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = 0$.
5. Etablir que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
6. Prouver que l'application S est convexe sur $\mathbb{R}^+$.
7. Montrer que S n'est pas dérivable en 0 en prouvant que $\lim\limits_{x\to 0} S'(x) = -\infty$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

On étudie la série de fonctions $\sum f_n$ définie par : $\forall n \geq 2, \forall x \geq 0, f_n(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n}$

1. Montrer qu'il y a convergence simple sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer qu'il y a convergence normale sur $[a,+\infty[$ (avec $a>0$) mais pas sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$. Conséquence pour la somme S ?
4. Montrer que la somme S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
5. Prouver que S n'est pas dérivable en 0 à droite.
6. Montrer que pour tout entier naturel k, on a : $\lim\limits_{x\to\infty} x^k S(x) = 0$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

- Si $x=0$ c'est facile. Si $x>0$, montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 f_n(x)=0$.
- Soit $S=\sum f_n$. Montrer que $S(0)=0$ et $S(x)=\dfrac{x^2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$ si $x>0$.
- Montrer que f_n est maximum en $x_n=2/n$, puis qu'il n'y a pas CVN sur $\mathbb{R}^+$.
- Montrer qu'il y a CVN sur $[a,+\infty[$, pour tout $a>0$.
- Par un argument de continuité, montrer qu'il n'y a pas CVU sur $\mathbb{R}^+$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

1. Montrer que $S=\sum f_n$ existe sur $[0,\pi]$, avec $S(x)=\operatorname{cotan}\frac{x}{2}$ sur $]0,\pi]$, et $S(0)=0$.
2. Par un argument de continuité, montrer qu'il n'y a pas CVU sur $[0,a]$, avec $0<a\leq\pi$.
3. Montrer que $\sum f_n$ est CVN sur $[a,\pi-a]$, avec $a\in]0,\frac{\pi}{2}[$.
4. En étudiant le reste R_N d'indice N, montrer qu'il n'y a pas CVU sur $]0,\pi]$.
5. Se donner a dans $]0,\pi]$. Par symétrie, montrer qu'il n'y a pas CVN sur $[a,\pi]$.
   En étudiant le reste R_N d'indice N, montrer qu'il y a CVU sur $[a,\pi]$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

1. Montrer que la série $\sum f_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}^+$.
2. La continuité de S découle d'un résultat du cours.
3. Sommer les inégalités $f_n(x)\geq f_n(y)\geq 0$, valables si $0\leq x\leq y$.
4. On a $S(0)=\dfrac{\pi^2}{6}$. Utiliser ensuite $0\leq f_n(x)\leq\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n^2}$.
5. Montrer qu'on peut appliquer le théorème de dérivation des séries de fonctions sur $[a,+\infty[$.
6. Montrer que la fonction S' est croissante.
7. Par l'absurde, on montre que la limite de S' en 0 n'est pas finie.
   On sera amené à utiliser la croissance de S' et le fait que les f_n' sont négatives.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

1. Vérifier que $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 f_n(x)=0$.
2. Il y a CVN sur $[a,+\infty[$, pour tout $a>0$, mais pas sur $\mathbb{R}^+$.
3. En majorant le reste R_N, montrer que $\sum f_n$ est CVU sur $\mathbb{R}^+$.
4. Il suffit de montrer que $\sum f_n'$ est CVU sur tout intervalle $I=[a,+\infty[$, avec $a>0$.
5. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{S(x)}{x}=+\infty$.
6. Majorer $f_n(x)$ par $\dfrac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln 2}$, puis $S(x)$ par $\mathrm{e}^{-x}\varphi(x)$, avec $\varphi(x)=\dfrac{x}{(\ln 2)(\mathrm{e}^x-1)}$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

– **Convergence simple** :

On constate que pour tout $n \geq 1$, $f_n(0) = 0$. Donc la série $\sum f_n(0)$ converge...

Si $x > 0$, alors $0 < \mathrm{e}^{-x} < 1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\mathrm{e}^{-nx} = \lim\limits_{n\to\infty} n^3(\mathrm{e}^{-x})^n = 0$ (croissance comparée.)

On en déduit $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 f_n(x) = 0$, ce qui prouve la convergence de la série $\sum f_n(x)$ (Riemann.)

Finalement la série de fonctions $\sum f_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}^+$.

– **Calcul de la somme** :

Soit S la somme de la série : $\forall x \in \mathbb{R}^+, S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. On sait déjà que $S(0) = 0$.

Pour tout $x > 0$, et si $q = \mathrm{e}^{-x}$, alors $0 < q < 1$ et $S(x) = x^2T(q)$, avec $T(q) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nq^n$.

On voit que $T(q) = q\sum\limits_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = q\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n-1)q^{n-1} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n = qT(q) + \dfrac{q}{1-q}$.

On en déduit $T(q) = \dfrac{q}{(1-q)^2}$, et donc $S(x) = x^2\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})^2} = \dfrac{x^2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$.

– **Convergence normale ou uniforme** :

On constate que $f_n'(x) = nx(2-nx)\mathrm{e}^{-x}$ s'annule en $x_n = \frac{2}{n}$.

En ce point la fonction positive f_n atteint son maximum $M_n = f_n(x_n) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^2\, n}$.

◇ La série $\sum M_n$ n'est pas convergente (série harmonique.)

On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}^+$.

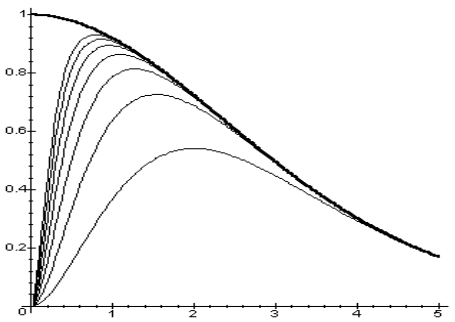
◇ En revanche il y a convergence normale (donc uniforme) sur $[a, +\infty[$, pour tout $a > 0$.

En effet dès que $\frac{2}{n} \leq a$ (c'est-à-dire $n \geq \frac{2}{a}$) la fonction f_n est décroissante sur $[a, +\infty[$.

On en déduit que pour $n \geq \frac{2}{a}$, $\sup\limits_{x\geq a} |f_n(x)| = f_n(a)$ (terme général d'une série CV.)

◇ On constate que $S = \sum f_n$ tend vers 1 en 0. Ainsi S n'est pas continue en 0, contrairement aux f_n. On en déduit qu'il n'y a pas CVU sur $\mathbb{R}^+$.

On a représenté ici les fonctions sommes partielles S_N pour $0 \leq N \leq 6$, ainsi que la somme S de la série (c'est la courbe "au-dessus").



Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.