Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Etudier la convergence et calculer la somme de la série de fonctions $\sum f_n$ définie par :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = n\,x^2 \mathrm{e}^{-nx}$.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

On considère la série de fonctions $\sum f_n$, avec : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0, \pi]$, $f_n(x) = \sin x \, \cos^n x$.

1. Montrer que la série $\sum f_n$ est simplement convergente sur $[0, \pi]$.
2. Justifier rapidement pourquoi la convergence n'est pas uniforme sur $[0, \pi]$.
3. Prouver qu'il y a convergence normale sur $[a, \pi - a]$, avec $0 < a < \frac{\pi}{2}$.
4. Calculer le reste d'indice N de $\sum f_n$ et montrer que celle-ci n'est pas CVU sur $]0, \pi]$.
5. Montrer qu'il y a convergence uniforme (mais pas normale) sur $[a, \pi]$, avec $0 < a < \pi$.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

On considère la série $\sum f_n$, où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{(n+x)^2}$.

1. Etudier la convergence de cette série sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que la somme S de cette série est continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. Prouver que l'application S est décroissante et positive sur $\mathbb{R}^+$.
4. Préciser la valeur de l'application S à l'origine, et montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = 0$.
5. Etablir que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
6. Prouver que l'application S est convexe sur $\mathbb{R}^+$.
7. Montrer que S n'est pas dérivable en 0 en prouvant que $\lim\limits_{x \to 0} S'(x) = -\infty$.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

On étudie la série de fonctions $\sum f_n$ définie par : $\forall n \geq 2, \forall x \geq 0, f_n(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n}$

1. Montrer qu'il y a convergence simple sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer qu'il y a convergence normale sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$) mais pas sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$. Conséquence pour la somme S ?
4. Montrer que la somme S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
5. Prouver que S n'est pas dérivable en 0 à droite.
6. Montrer que pour tout entier naturel k, on a : $\lim\limits_{x \to \infty} x^k S(x) = 0$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

- Si $x = 0$ c'est facile. Si $x > 0$, montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 f_n(x) = 0$.
- Soit $S = \sum f_n$. Montrer que $S(0) = 0$ et $S(x) = \dfrac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2}$ si $x > 0$.
- Montrer que f_n est maximum en $x_n = 2/n$, puis qu'il n'y a pas CVN sur $\mathbb{R}^+$.
- Montrer qu'il y a CVN sur $[a, +\infty[$, pour tout $a > 0$.
- Par un argument de continuité, montrer qu'il n'y a pas CVU sur $\mathbb{R}^+$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

1. Montrer que $S = \sum f_n$ existe sur $[0, \pi]$, avec $S(x) = \operatorname{cotan} \frac{x}{2}$ sur $]0, \pi]$, et $S(0) = 0$.
2. Par un argument de continuité, montrer qu'il n'y a pas CVU sur $[0, a]$, avec $0 < a \le \pi$.
3. Montrer que $\sum f_n$ est CVN sur $[a, \pi - a]$, avec $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
4. En étudiant le reste R_N d'indice N, montrer qu'il n'y a pas CVU sur $]0, \pi]$.
5. Se donner a dans $]0, \pi]$. Par symétrie, montrer qu'il n'y a pas CVN sur $[a, \pi]$.
   En étudiant le reste R_N d'indice N, montrer qu'il y a CVU sur $[a, \pi]$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

1. Montrer que la série $\sum f_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}^+$.
2. La continuité de S découle d'un résultat du cours.
3. Sommer les inégalités $f_n(x) \ge f_n(y) \ge 0$, valables si $0 \le x \le y$.
4. On a $S(0) = \frac{\pi^2}{6}$. Utiliser ensuite $0 \le f_n(x) \le \frac{e^{-x}}{n^2}$.
5. Montrer qu'on peut appliquer le théorème de dérivation des séries de fonctions sur $[a, +\infty[$.
6. Montrer que la fonction S' est croissante.
7. Par l'absurde, on montre que la limite de S' en 0 n'est pas finie.
   On sera amené à utiliser la croissance de S' et le fait que les f_n' sont négatives.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

1. Vérifier que $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 f_n(x) = 0$.
2. Il y a CVN sur $[a, +\infty[$, pour tout $a > 0$, mais pas sur $\mathbb{R}^+$.
3. En majorant le reste R_N, montrer que $\sum f_n$ est CVU sur $\mathbb{R}^+$.
4. Il suffit de montrer que $\sum f_n'$ est CVU sur tout intervalle $I = [a, +\infty[$, avec $a > 0$.
5. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{S(x)}{x} = +\infty$.
6. Majorer $f_n(x)$ par $\frac{x e^{-nx}}{\ln 2}$, puis $S(x)$ par $e^{-x}\varphi(x)$, avec $\varphi(x) = \frac{x}{(\ln 2)(e^x - 1)}$.

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

- **Convergence simple** :

  On constate que pour tout $n \geq 1$, $f_n(0) = 0$. Donc la série $\sum f_n(0)$ converge...

  Si $x > 0$, alors $0 < \mathrm{e}^{-x} < 1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\mathrm{e}^{-nx} = \lim\limits_{n\to\infty} n^3(\mathrm{e}^{-x})^n = 0$ (croissance comparée.)

  On en déduit $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 f_n(x) = 0$, ce qui prouve la convergence de la série $\sum f_n(x)$ (Riemann.)

  Finalement la série de fonctions $\sum f_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}^+$.

- **Calcul de la somme** :

  Soit S la somme de la série : $\forall x \in \mathbb{R}^+, S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. On sait déjà que $S(0) = 0$.

  Pour tout $x > 0$, et si $q = \mathrm{e}^{-x}$, alors $0 < q < 1$ et $S(x) = x^2 T(q)$, avec $T(q) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nq^n$.

  On voit que $T(q) = q\sum\limits_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = q\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n-1)q^{n-1} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n = qT(q) + \dfrac{q}{1-q}$.

  On en déduit $T(q) = \dfrac{q}{(1-q)^2}$, et donc $S(x) = x^2\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})^2} = \dfrac{x^2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$.

- **Convergence normale ou uniforme** :

  On constate que $f_n'(x) = nx(2-nx)\mathrm{e}^{-x}$ s'annule en $x_n = \frac{2}{n}$.

  En ce point la fonction positive f_n atteint son maximum $M_n = f_n(x_n) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^2\, n}$.

  ◇ La série $\sum M_n$ n'est pas convergente (série harmonique.)
  On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}^+$.

  ◇ En revanche il y a convergence normale (donc uniforme) sur $[a, +\infty[$, pour tout $a > 0$.
  En effet dès que $\frac{2}{n} \leq a$ (c'est-à-dire $n \geq \frac{2}{a}$) la fonction f_n est décroissante sur $[a, +\infty[$.
  On en déduit que pour $n \geq \frac{2}{a}$, $\sup\limits_{x\geq a}|f_n(x)| = f_n(a)$ (terme général d'une série CV.)

  ◇ On constate que $S = \sum f_n$ tend vers 1 en 0. Ainsi S n'est pas continue en 0, contrairement aux f_n. On en déduit qu'il n'y a pas CVU sur $\mathbb{R}^+$.

On a représenté ici les fonctions sommes partielles S_N pour $0 \leq N \leq 6$, ainsi que la somme S de la série (c'est la courbe "au-dessus").