

## Énoncés des exercices

**EXERCICE 1** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Etudier la convergence et calculer la somme de la série de fonctions  $\sum f_n$  définie par :  
 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = nx^2e^{-nx}$ .

**EXERCICE 2** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

On considère la série de fonctions  $\sum f_n$ , avec :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, \pi], f_n(x) = \sin x \cos^n x$ .

1. Montrer que la série  $\sum f_n$  est simplement convergente sur  $[0, \pi]$ .
2. Justifier rapidement pourquoi la convergence n'est pas uniforme sur  $[0, \pi]$ .
3. Prouver qu'il y a convergence normale sur  $[a, \pi - a]$ , avec  $0 < a < \frac{\pi}{2}$ .
4. Calculer le reste d'indice  $N$  de  $\sum f_n$  et montrer que celle-ci n'est pas CVU sur  $]0, \pi]$ .
5. Montrer qu'il y a convergence uniforme (mais pas normale) sur  $[a, \pi]$ , avec  $0 < a < \pi$ .

**EXERCICE 3** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

On considère la série  $\sum f_n$ , où :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{(n+x)^2}$ .

1. Etudier la convergence de cette série sur  $\mathbb{R}^+$ .
2. Montrer que la somme  $S$  de cette série est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .
3. Prouver que l'application  $S$  est décroissante et positive sur  $\mathbb{R}^+$ .
4. Préciser la valeur de l'application  $S$  à l'origine, et montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0$ .
5. Etablir que la fonction  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .
6. Prouver que l'application  $S$  est convexe sur  $\mathbb{R}^+$ .
7. Montrer que  $S$  n'est pas dérivable en 0 en prouvant que  $\lim_{x \rightarrow 0} S'(x) = -\infty$ .

**EXERCICE 4** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

On étudie la série de fonctions  $\sum f_n$  définie par :  $\forall n \geq 2, \forall x \geq 0, f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$

1. Montrer qu'il y a convergence simple sur  $\mathbb{R}^+$ .
2. Montrer qu'il y a convergence normale sur  $[a, +\infty[$  (avec  $a > 0$ ) mais pas sur  $\mathbb{R}^+$ .
3. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur  $\mathbb{R}^+$ . Conséquence pour la somme  $S$  ?
4. Montrer que la somme  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .
5. Prouver que  $S$  n'est pas dérivable en 0 à droite.
6. Montrer que pour tout entier naturel  $k$ , on a :  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k S(x) = 0$ .

## Indications ou résultats

### INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

- Si  $x = 0$  c'est facile. Si  $x > 0$ , montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 f_n(x) = 0$ .
- Soit  $S = \sum f_n$ . Montrer que  $S(0) = 0$  et  $S(x) = \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2}$  si  $x > 0$ .
- Montrer que  $f_n$  est maximum en  $x_n = 2/n$ , puis qu'il n'y a pas CVN sur  $\mathbb{R}^+$ .
- Montrer qu'il y a CVN sur  $[a, +\infty[$ , pour tout  $a > 0$ .
- Par un argument de continuité, montrer qu'il n'y a pas CVU sur  $\mathbb{R}^+$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. Montrer que  $S = \sum f_n$  existe sur  $[0, \pi]$ , avec  $S(x) = \cotan \frac{x}{2}$  sur  $]0, \pi]$ , et  $S(0) = 0$ .
2. Par un argument de continuité, montrer qu'il n'y a pas CVU sur  $[0, a]$ , avec  $0 < a \leq \pi$ .
3. Montrer que  $\sum f_n$  est CVN sur  $[a, \pi - a]$ , avec  $a \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ .
4. En étudiant le reste  $R_N$  d'indice  $N$ , montrer qu'il n'y a pas CVU sur  $]0, \pi]$ .
5. Se donner  $a$  dans  $]0, \pi]$ . Par symétrie, montrer qu'il n'y a pas CVN sur  $[a, \pi]$ .  
En étudiant le reste  $R_N$  d'indice  $N$ , montrer qu'il y a CVU sur  $[a, \pi]$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. Montrer que la série  $\sum f_n$  est normalement convergente sur  $\mathbb{R}^+$ .
2. La continuité de  $S$  découle d'un résultat du cours.
3. Sommer les inégalités  $f_n(x) \geq f_n(y) \geq 0$ , valables si  $0 \leq x \leq y$ .
4. On a  $S(0) = \frac{\pi^2}{6}$ . Utiliser ensuite  $0 \leq f_n(x) \leq \frac{e^{-x}}{n^2}$ .
5. Montrer qu'on peut appliquer le théorème de dérivation des séries de fonctions sur  $[a, +\infty[$ .
6. Montrer que la fonction  $S'$  est croissante.
7. Par l'absurde, on montre que la limite de  $S'$  en 0 n'est pas finie.  
On sera amené à utiliser la croissance de  $S'$  et le fait que les  $f'_n$  sont négatives.

### INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. Vérifier que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 f_n(x) = 0$ .
2. Il y a CVN sur  $[a, +\infty[$ , pour tout  $a > 0$ , mais pas sur  $\mathbb{R}^+$ .
3. En majorant le reste  $R_N$ , montrer que  $\sum f_n$  est CVU sur  $\mathbb{R}^+$ .
4. Il suffit de montrer que  $\sum f'_n$  est CVU sur tout intervalle  $I = [a, +\infty[$ , avec  $a > 0$ .
5. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{S(x)}{x} = +\infty$ .
6. Majorer  $f_n(x)$  par  $\frac{x e^{-nx}}{\ln 2}$ , puis  $S(x)$  par  $e^{-x} \varphi(x)$ , avec  $\varphi(x) = \frac{x}{(\ln 2)(e^x - 1)}$ .

## Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [[Retour à l'énoncé](#)]

### – Convergence simple :

On constate que pour tout  $n \geq 1$ ,  $f_n(0) = 0$ . Donc la série  $\sum f_n(0)$  converge...

Si  $x > 0$ , alors  $0 < e^{-x} < 1$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 e^{-nx} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 (e^{-x})^n = 0$  (croissance comparée.)

On en déduit  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 f_n(x) = 0$ , ce qui prouve la convergence de la série  $\sum f_n(x)$  (Riemann.)

Finalement la série de fonctions  $\sum f_n$  est simplement convergente sur  $\mathbb{R}^+$ .

### – Calcul de la somme :

Soit  $S$  la somme de la série :  $\forall x \in \mathbb{R}^+, S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ . On sait déjà que  $S(0) = 0$ .

Pour tout  $x > 0$ , et si  $q = e^{-x}$ , alors  $0 < q < 1$  et  $S(x) = x^2 T(q)$ , avec  $T(q) = \sum_{n=1}^{\infty} nq^n$ .

On voit que  $T(q) = q \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = q \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)q^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} q^n = qT(q) + \frac{q}{1-q}$ .

On en déduit  $T(q) = \frac{q}{(1-q)^2}$ , et donc  $S(x) = x^2 \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} = \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2}$ .

### – Convergence normale ou uniforme :

On constate que  $f'_n(x) = nx(2-nx)e^{-x}$  s'annule en  $x_n = \frac{2}{n}$ .

En ce point la fonction positive  $f_n$  atteint son maximum  $M_n = f_n(x_n) = \frac{4}{e^2 n}$ .

◇ La série  $\sum M_n$  n'est pas convergente (série harmonique.)

On en déduit que la série de fonctions  $\sum f_n$  n'est pas normalement convergente sur  $\mathbb{R}^+$ .

◇ En revanche il y a convergence normale (donc uniforme) sur  $[a, +\infty[$ , pour tout  $a > 0$ .

En effet dès que  $\frac{2}{n} \leq a$  (c'est-à-dire  $n \geq \frac{2}{a}$ ) la fonction  $f_n$  est décroissante sur  $[a, +\infty[$ .

On en déduit que pour  $n \geq \frac{2}{a}$ ,  $\sup_{x \geq a} |f_n(x)| = f_n(a)$  (terme général d'une série CV.)

◇ On constate que  $S = \sum f_n$  tend vers 1 en 0. Ainsi  $S$  n'est pas continue en 0, contrairement aux  $f_n$ . On en déduit qu'il n'y a pas CVU sur  $\mathbb{R}^+$ .

On a représenté ici les fonctions sommes partielles  $S_N$  pour  $0 \leq N \leq 6$ , ainsi que la somme  $S$  de la série (c'est la courbe "au-dessus").

