Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$. Soient u, v deux vecteurs de E.
On suppose que, pour tout λ de $\mathbb{K}$, $\|u+\lambda v\| \geq \|u\|$.
Montrer que u et v sont orthogonaux.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $f = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E, < f(x), x > = 0$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Dans l'espace E préhilbertien réel, soit f une application telle que $f(0) = 0$ et
(1) : $\forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

1. Montrer que f conserve le produit scalaire.
2. En déduire que f est linéaire.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbb{C}$.
Montrer que $\forall (u, v) \in E^2, < u, v >= \dfrac{1}{2}\left[\|u+v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - (1+i)\|u\|^2 + \|v\|^2\right]$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit E un espace préhilbertien, et soit f une application de E dans E telle que, pour tous vecteurs x et y : $< f(x), y >=< x, f(y) >$.
Montrer que f est linéaire.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Élever au carré, trouver $2\text{Re}\left(\lambda < u, v >\right) + |\lambda|^2 \|v\|^2 \geq 0$.

Choisir ensuite $\lambda = r < v, u >$, avec r réel.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Se donner x, y quelconques dans E.

Développer $< f(x+iy), x+iy >$ et $< f(x+y), x+y >$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

1. Vérifier que f conserve la norme, puis développer $\|f(x) - f(y)\|^2$.
2. Se donner deux vecteurs x, y et deux scalaires α, β.
   Développer $\|f(\alpha x + \beta y) - \alpha f(x) - \beta f(y)\|^2$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

On sait que $\|u+v\|^2 = < u+v, u+v > = \|u\|^2 + 2\text{Re}\ < u, v > + \|v\|^2$.

Développer également $\|u+iv\|^2$, puis former $\|u+v\|^2 + i\|u+iv\|^2$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Se donner x, y, z dans E, et α et β dans $\mathbb{K}$.

Vérifier que $< z, f(\alpha x + \beta y) > = < z, \alpha f(x) + \beta f(y) >$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.