# Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Déterminer les endomorphismes $f$ de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté tels que :
$\forall\, u, v \in E,\ f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit $F$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ (euclidien) d'équations $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases}$

Déterminer la projection orthogonale sur $F$, par deux méthodes différentes.

Calculer la distance $d(u, F)$ d'un vecteur $u$ de $\mathbb{R}^4$ au sous-espace $F$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien.
Soit $f$ un endomorphisme de $E$ qui "conserve l'orthogonalité", c'est-à-dire tel que, pour tous vecteurs $u$ et $v$ de $E$, $< u, v >= 0 \Rightarrow < f(u), f(v) >= 0$.
Montrer qu'il existe un réel $\lambda \geq 0$ tel que, pour tout vecteur $u$ de $E$, $\|f(u)\| = \lambda \|u\|$.
Si $\lambda > 0$, on dit alors que $f$ est une *similitude* de rapport $\lambda$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soient $E$ un espace vectoriel euclidien et $f$ un endomorphisme de $E$ tel que $f^2 = 0$.
Soit $f^*$ l'adjoint de $f$. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f + f^*) = \mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(f^*)$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $u \circ u^* = u^* \circ u$.

1. Montrer que $u$ et $u^*$ ont le même noyau.
2. Montrer que $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(u^*)$, et que pour toute valeur propre $\lambda$ les sous-espaces propres de $u$ et de $u^*$ pour $\lambda$ sont identiques.
3. Montrer que les sous-espaces propres de $u$ sont orthogonaux deux à deux.


Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

# Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Écarter la solution évidente $f = 0$.

Appliquer l'hypothèse aux vecteurs $e_1, e_2, e_3$ d'une base orthonormée directe.

Montrer que les $f(e_k)$ sont orthogonaux deux à deux, puis qu'ils sont unitaires.

Montrer que $f$ est une rotation, puis établir la réciproque.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

- Première méthode :
  Soit $v = (x', y', z', t')$ la projection orthogonale de $u = (x, y, z, t)$ sur $F$.
  Montrer que $F^\perp$ est engendré par $a = (1, 1, 1, 1)$ et $b = (1, -1, 1, -1)$.
  Trouver $\lambda, \mu$ tels que $v - u = \lambda a + \mu b$. La distance de $u$ à $F$ est donnée par $d^2 = \|v - u\|^2$.
- Deuxième méthode :
  Montrer que $c = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0)$ et $d = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1)$ forment une base ortonormée de $F$.
  En déduire que $v = p(u) =< c, u > c + < d, v > d$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Se donner une base orthonormée $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$ de $E$.

Remarquer que les $f(e_j)$ sont orthogonaux deux à deux.

Considérer les $e_i + e_j$ et $e_i - e_j$, avec $i \neq j$, et en déduire que les $e_k$ ont même norme..

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Si $x \in \mathrm{Ker}\,(f + f^*)$, montrer que $f^*(x) = \overrightarrow{0}$. En déduire $f(x) = \overrightarrow{0}$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

1. Pour tout $x$ de $E$, montrer que $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
2. Pour tout $\lambda$, appliquer ce qui précède à $v = u - \lambda Id$.
3. Se donner deux valeurs propres distinctes et deux vecteurs propres associés $x$ et $y$.
   Considérer $< u(x), y >$ et en déduire l'orthogonalité de $x$ et $y$.


Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.