Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Montrer qu'il existe dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une base formée de matrices orthogonales.
Montrer que ce résultat reste vrai dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

1. Montrer que $< A, B >= \text{tr}\,({}^TA \cdot B)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Pour quelles matrices M l'application $A \to AM$ est-elle alors orthogonale ?

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1-i & -2 & -3 & 4 \\ -2 & 2-i & 18 & 2 \\ -3 & 18 & 1-i & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3-i \end{pmatrix}$ est inversible.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit A une matrice carrée symétrique, à coefficients réels.
On suppose que $A^m = I$, pour un certain entier m. Montrer que $A^2 = I$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice orthogonale d'ordre n. Prouver $\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}$ et $\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\right| \leq n$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, considérer $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 2$, noter E_{ij} les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Considérer $F_j = I_n - 2E_{jj}$ (pour $j \geq 2$). Pour tous $i < j$ noter G_{ij} et H_{ij} les matrices qui se déduisent respectivement de I_n et de F_j par échange des lignes d'indice i et j.

Considérer la famille formée de I_n, des F_j, des G_{ij} et des H_{ij}.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

1. Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$, montrer que $< A, B > = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{ki}$.
2. Montrer que $A \to AM$ est orthogonale $\Leftrightarrow \operatorname{tr}({}^TABM\,{}^TM) = \operatorname{tr}({}^TAB)$, pour tous A, B.
   Montrer que cela signifie que M est une matrice orthogonale.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

$A = S - iI_4$, où S est symétrique réelle.

D'après le cours, les valeurs propres de S sont toutes réelles.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Diagonaliser A. Montrer que les valeurs propres de A sont dans $\{-1, 1\}$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Majorer $S = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$ en utilisant Cauchy-Schwarz.

Pour la deuxième majoration, poser $T = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}$.

Soit $f \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$ de matrice A dans la base canonique. Soit $u = (1, 1, \ldots, 1)$.

Vérifier que $T = < u, f(u) >$. Appliquer à nouveau Cauchy-Schwarz.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.