Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Montrer qu'il existe dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une base formée de matrices orthogonales.
Montrer que ce résultat reste vrai dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

1. Montrer que $< A, B >= \operatorname{tr}({}^T\!A \cdot B)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Pour quelles matrices M l'application $A \to AM$ est-elle alors orthogonale ?

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1-i & -2 & -3 & 4 \\ -2 & 2-i & 18 & 2 \\ -3 & 18 & 1-i & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3-i \end{pmatrix}$ est inversible.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit A une matrice carrée symétrique, à coefficients réels.
On suppose que $A^m = I$, pour un certain entier m. Montrer que $A^2 = I$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice orthogonale d'ordre n. Prouver $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}$ et $\left|\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\right| \leq n$.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, considérer $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 2$, noter E_{ij} les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Considérer $F_j = I_n - 2E_{jj}$ (pour $j \geq 2$). Pour tous $i < j$ noter G_{ij} et H_{ij} les matrices qui se déduisent respectivement de I_n et de F_j par échange des lignes d'indice i et j.

Considérer la famille formée de I_n, des F_j, des G_{ij} et des H_{ij}.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

1. Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$, montrer que $< A, B > = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{ki}$.
2. Montrer que $A \to AM$ est orthogonale $\Leftrightarrow \operatorname{tr}({}^T\!ABM\,{}^T\!M) = \operatorname{tr}({}^T\!AB)$, pour tous A, B.

   Montrer que cela signifie que M est une matrice orthogonale.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

$A = S - iI_4$, où S est symétrique réelle.

D'après le cours, les valeurs propres de S sont toutes réelles.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Diagonaliser A. Montrer que les valeurs propres de A sont dans $\{-1, 1\}$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Majorer $S = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$ en utilisant Cauchy-Schwarz.

Pour la deuxième majoration, poser $T = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}$.

Soit $f \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$ de matrice A dans la base canonique. Soit $u = (1, 1, \ldots, 1)$.

Vérifier que $T = < u, f(u) >$. Appliquer à nouveau Cauchy-Schwarz.