Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes.

a) Il existe M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^TMM$.

b) La matrice A est symétrique et ses valeurs propres sont ≥ 0.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n.

On pose, pour toute matrice colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\varphi(X,Y) = {}^TXAY$.

1. Exprimer $\varphi(X,Y)$ en fonction des composantes de X et de Y dans une base orthonormée de vecteurs propres de A, et en fonction des valeurs propres de A.
2. Montrer que l'application $(X,Y) \mapsto \varphi(X,Y)$ définit un produit scalaire si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice symétrique réelle d'ordre n, de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

On considère la matrice A carrée d'ordre n, dont le terme général est $a_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$.

Montrer que les valeurs propres de A sont strictement positives.

Indication : pour tout vecteur propre X, considérer ${}^TXAX$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.