Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes.

a) Il existe M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^T M M$.

b) La matrice A est symétrique et ses valeurs propres sont ≥ 0.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n.

On pose, pour toute matrice colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\varphi(X, Y) = {}^T X A Y$.

1. Exprimer $\varphi(X, Y)$ en fonction des composantes de X et de Y dans une base orthonormée de vecteurs propres de A, et en fonction des valeurs propres de A.
2. Montrer que l'application $(X, Y) \mapsto \varphi(X, Y)$ définit un produit scalaire si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice symétrique réelle d'ordre n, de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

On considère la matrice A carrée d'ordre n, dont le terme général est $a_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$.

Montrer que les valeurs propres de A sont strictement positives.

Indication : pour tout vecteur propre X, considérer ${}^T X A X$.