



Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes.

- Il existe M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^TMM$.
- La matrice A est symétrique et ses valeurs propres sont ≥ 0 .

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n .

On pose, pour toute matrice colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\varphi(X, Y) = {}^TXAY$.

- Exprimer $\varphi(X, Y)$ en fonction des composantes de X et de Y dans une base orthonormée de vecteurs propres de A , et en fonction des valeurs propres de A .
- Montrer que l'application $(X, Y) \mapsto \varphi(X, Y)$ définit un produit scalaire si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice symétrique réelle d'ordre n , de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Montrer que $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

On considère la matrice A carrée d'ordre n , dont le terme général est $a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$.

Montrer que les valeurs propres de A sont strictement positives.

Indication : pour tout vecteur propre X , considérer TXAX .