Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soient f et g deux endomorphismes de E, avec $\dim(E) = n \geq 1$.

On suppose que f et g commutent et qu'ils sont diagonalisables.

Montrer que f et g sont diagonalisables dans une même base (e) de E.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit f un endomorphisme de E tel que $(f - Id)^3 \circ (f + 2Id) = 0$ et $(f - Id)^2 \circ (f + 2Id) \neq 0$.

L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit A une matrice de $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ telle que $A^3 = A^2 + 4A - 4I_n$.

Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

1. Montrer que $P \to \varphi(P) = X(X-1)P' - nXP$ définit un endomorphisme φ de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
3. Déterminer les sous-espaces propres de φ.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

On se donne une famille $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de n nombres complexes.

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la matrice A de terme général $a_{ij} = \lambda_i \lambda_j$.

La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Pour tous $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $A \otimes M = \begin{pmatrix} aM & bM \\ cM & dM \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(A \otimes M)(B \otimes N) = (AB) \otimes (MN)$.
2. Etablir que $\det(A \otimes M) = (\det A)^n (\det M)^2$.
3. Montrer que : A, M inversibles $\Rightarrow A \otimes M$ inversible et $(A \otimes M)^{-1} = A^{-1} \otimes M^{-1}$.
4. Prouver que si A et M sont diagonalisables, alors $A \otimes M$ est diagonalisable.

Exercice 7 [Indication] [Correction]

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, inversible et diagonalisable.

Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que $B^2 = A$.

Montrer que B est diagonalisable.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Rappelez pourquoi on peut diagonaliser la restriction de g à chaque sous-espace propre de f.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

f est annulée par $P = (X-1)^3(X+2)$.

f n'est pas diagonalisable, sinon elle serait annulée par $(X-1)(X+2)$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

La matrice A est diagonalisable car annulée par un polynôme scindé à racines simples.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

1. La linéarité est évidente. Vérifier que si $0 \leq m \leq n$ alors $\varphi(X^m)$ est encore dans $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Vérifier que la matrice de φ dans la base $1, X, \ldots, X^n$ de $\mathbb{K}_n[X]$ est triangulaire.
   φ est diagonalisable car ayant $n+1$ valeurs propres distinctes.
3. $\forall \lambda \in \{0, -1, \ldots, -n\}$, la droite propre E_λ est engendrée par $P_\lambda = X^{-\lambda}(X-1)^{n+\lambda}$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Écarter le cas évident où tous les λ_k sont nuls. Montrer qu'alors A est de rang 1.

Utiliser la trace de A pour trouver la valeur propre $s = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$. Envisager $s = 0$ et $s \neq 0$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

1. Vérification immédiate.
2. Envisager d'abord $a = 0$, puis $a \neq 0$.
3. Utiliser la question 1.
4. Écrire l'égalité $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, et $Q^{-1}MQ = D$, avec D diagonale.
   Avec $R = P \otimes Q$, montrer que $R^{-1}(A \otimes M)R = \begin{pmatrix} \lambda D & 0_n \\ 0_n & \mu D \end{pmatrix}$.

Indication pour l'exercice 7 [Retour à l'énoncé]

Soit $P = \prod_{k=1}^{m} (X - \lambda_k)$ où les λ_k sont les valeurs propres distinctes de A.

Chaque λ_k étant non nul, considérer ses deux racines carrées distinctes α_k et $-\alpha_k$.

En déduire $\prod_{k=1}^{m} (B - \alpha_k I_n)(B + \alpha_k I_n) = 0$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.