

## Énoncés des exercices

### EXERCICE 1 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n \geq 1$ .

On suppose que  $f$  et  $g$  commutent.

Montrer que  $f$  et  $g$  ont au moins un vecteur propre en commun.

### EXERCICE 2 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Vecteurs propres de l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}[X]$  défini par  $f(P) = (2X + 1)P + (1 - X^2)P'$ .

### EXERCICE 3 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $E$  l'espace des fonctions continues de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $T$  définie sur  $E$  par  $T(f)(0) = f(0)$  et, pour  $x > 0$ ,  $T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ .

1. Montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Déterminer le noyau de  $T$ . L'opérateur  $T$  est-il injectif? surjectif?
3. Indiquer ses valeurs propres non nulles et les sous-espaces propres associés.

### EXERCICE 4 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n \geq 1$ .

Montrer que  $g \circ f$  et  $f \circ g$  ont les mêmes valeurs propres.

Indication : considérer à part le cas de la valeur propre 0.

Donner un contre-exemple dans le cas où  $E$  n'est pas de dimension finie.

### EXERCICE 5 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soient  $A$  et  $B$  dans deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Montrer que  $AB$  et  $BA$  ont le même polynôme caractéristique.

### EXERCICE 6 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $M$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , ayant  $n$  valeurs propres distinctes. Montrer que les matrices qui commutent avec  $M$  sont les combinaisons linéaires de  $I_n, M, M^2, \dots, M^{n-1}$ .

### EXERCICE 7 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $M$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , inversible.

Exprimer le polynôme caractéristique de  $M^{-1}$  en fonction de celui de  $M$ .

## Indications ou résultats

### INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Considérer la restriction de  $g$  à un sous-espace propre de  $f$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Seuls les polynômes de degré 2 peuvent être vecteurs propres. On trouve :

$P = \alpha(X^2 - 1)$  pour  $\lambda = 1$ ,  $P = \alpha(X^2 - 2X + 1)$  pour  $-1$ ,  $P = \alpha(X^2 + 2X + 1)$  pour  $3$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

1. Si  $f \in E$ , on a  $T(f)(x) = \frac{F(x)}{x}$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , où  $F$  la primitive de  $f$  qui s'annule en 0.

Vérifier que  $\lim_{x \rightarrow 0} T(f)(x) = F'(0) = f(0)$ .

2. Si  $T(f) = 0$ , alors, par dérivation puis continuité, on trouve  $f(x) = 0$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

$T$  n'est pas surjectif car son image est une partie stricte de  $E$ .

3. Vérifier que  $T(f) = \lambda f \Leftrightarrow \forall x > 0, \lambda x f'(x) = (1 - \lambda)f(x)$ .

Résoudre l'équation différentielle et prouver que le spectre de  $T$  est  $]0, 1]$ .

Pour tout  $\lambda$  de  $]0, 1]$ , le sous-espace propre est la droite engendrée par  $y_\lambda(x) = x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

– Remarquer que si  $g \circ f$  n'est pas injective, il en est de même de  $f \circ g$ .

– Si  $g \circ f(x) = \lambda x$ , avec  $\lambda \neq 0$  et  $x \neq \vec{0}$ , composer par  $f$  à gauche.

Pour le contre-exemple, choisir  $f(P) = XP$  et  $g(P) = P'$  dans  $E = \mathbb{K}[X]$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Si  $A$  est inversible,  $\chi_{AB}(x) = \det(AB - xI_n) = \det(A(B - xA^{-1})) = \dots$

Sinon, considérer les matrices  $A_\lambda = A - \lambda I_n$ , pour tout  $\lambda$  de  $\mathbb{K}$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$ , de matrice  $M$  dans la base canonique.

Soit  $g$  un endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$ , commutant avec  $f$ .

Constater que  $g$  laisse stable les droites vectorielles propres de  $f$ .

En déduire un système de Van Der Monde permettant d'écrire  $g = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j f^j$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 7 [Retour à l'énoncé]

On trouve :  $\chi_{M^{-1}}(X) = \det(M^{-1}) (-X)^n \chi_M\left(\frac{1}{X}\right)$ .