Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$.

On suppose que f et g commutent.

Montrer que f et g ont au moins un vecteur propre en commun.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Vecteurs propres de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}[X]$ défini par $f(P) = (2X+1)P + (1-X^2)P'$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit E l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

Soit T définie sur E par $T(f)(0) = f(0)$ et, pour $x > 0$, $T(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Déterminer le noyau de T. L'opérateur T est-il injectif ? surjectif ?
3. Indiquer ses valeurs propres non nulles et les sous-espaces propres associés.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$.

Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ ont les mêmes valeurs propres.

Indication : considérer à part le cas de la valeur propre 0.

Donner un contre-exemple dans le cas où E n'est pas de dimension finie.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soient A et B dans deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ayant n valeurs propres distinctes. Montrer que les matrices qui commutent avec M sont les combinaisons linéaires de $I_n, M, M^2, \ldots, M^{n-1}$.

Exercice 7 [Indication] [Correction]

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, inversible.

Exprimer le polynôme caractéristique de M^{-1} en fonction de celui de M.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Considérer la restriction de g à un sous-espace propre de f.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Seuls les polynômes de degré 2 peuvent être vecteurs propres. On trouve :
$P = \alpha(X^2 - 1)$ pour $\lambda = 1$, $P = \alpha(X^2 - 2X + 1)$ pour -1, $P = \alpha(X^2 + 2X + 1)$ pour 3.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

1. Si $f \in E$, on a $T(f)(x) = \dfrac{F(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, où F la primitive de f qui s'annule en 0.
   Vérifier que $\lim\limits_{x\to 0} T(f)(x) = F'(0) = f(0)$.
2. Si $T(f) = 0$, alors, par dérivation puis continuité, on trouve $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}^+$.
   T n'est pas surjectif car son image est une partie stricte de E.
3. Vérifier que $T(f) = \lambda f \Leftrightarrow \forall x > 0, \lambda x f'(x) = (1-\lambda) f(x)$.
   Résoudre l'équation différentielle et prouver que le spectre de T est $]0, 1]$.
   Pour tout λ de $]0, 1]$, le sous-espace propre est la droite engendrée par $y_\lambda(x) = x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

– Remarquer que si $g \circ f$ n'est pas injective, il en est de même de $f \circ g$.
– Si $g \circ f(x) = \lambda x$, avec $\lambda \neq 0$ et $x \neq \overrightarrow{0}$, composer par f à gauche.

Pour le contre-exemple, choisir $f(P) = XP$ et $g(P) = P'$ dans $E = \mathbb{K}[X]$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Si A est inversible, $\chi_{AB}(x) = \det(AB - xI_n) = \det(A(B - xA^{-1})) = \cdots$
Sinon, considérer les matrices $A_\lambda = A - \lambda I_n$, pour tout λ de $\mathbb{K}$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$, de matrice M dans la base canonique.
Soit g un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$, commutant avec f.
Constater que g laisse stable les droites vectorielles propres de f.
En déduire un système de Van Der Monde permettant d'écrire $g = \sum\limits_{j=0}^{n-1} \alpha_j f^j$.

Indication pour l'exercice 7 [Retour à l'énoncé]

On trouve : $\chi_{M^{-1}}(X) = \det(M^{-1})\,(-X)^n\,\chi_M\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.