Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Diagonaliser la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Diagonaliser la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}$ si possible, sinon dans $\mathbb{C}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Diagonaliser la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Donner une CNS sur a, b, c, d, e, f pour que $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Diagonaliser la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Trouver *une* matrice M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ telle que $M^2 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On donnera deux méthodes différentes.

Exercice 7 [Indication] [Correction]

Trouver *toutes* les matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ tq $M^2 = A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 [Indication] [Correction]

Peut-on diagonaliser la matrice B définie par $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$?

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On trouve $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On trouve $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

On trouve $\chi_A(\lambda) = 1 - \lambda^5$: les valeurs propres de A sont les racines cinquièmes de l'unité.

On pose $\omega = \exp(\frac{2i\pi}{5})$.

On trouve $P^{-1}AP = D$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega & \omega^3 \\ 1 & \omega^3 & \omega & \omega^4 & \omega^2 \\ 1 & \omega^4 & \omega^3 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^4 \end{pmatrix}$

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

La condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable est $a = f = 0$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

On a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a+b+c\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & a+b-c\sqrt{2} \end{pmatrix}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

- Première méthode : si $A = PDP^{-1}$, utiliser Δ diagonale telle que $\Delta^2 = D$.
- Deuxième méthode : on a $A^2 = 3I + 2A$. Chercher $M = xI + yA$ telle que $M^2 = A$.

Indication pour l'exercice 7 [Retour à l'énoncé]

Si $A = PDP^{-1}$, avec D diagonale, trouver les Δ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $\Delta^2 = D$.

Indication pour l'exercice 8 [Retour à l'énoncé]

$\lambda = 0$ est une valeur propre double, mais $\ker B$ est une droite vectorielle.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On calcule le polynôme caractéristique.

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} -1-x & 1 & 1 \\ 1 & -1-x & 1 \\ 1 & 1 & -1-x \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1-x & 1 \\ 1 & 1 & -1-x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2-x & 0 \\ 0 & 0 & -2-x \end{vmatrix} = (1-x)(x+2)^2 : \begin{cases} 1 \text{ est valeur propre simple} \\ -2 \text{ est valeur propre double} \end{cases}$$

Notons E_1 et E_{-2} les deux sous-espaces propres.

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2} \Leftrightarrow x+y+z=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

On voit que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour $\lambda = 1$.

On a ainsi obtenu une base de vecteurs propres.

La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On calcule le polynôme caractéristique de A.

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 4\lambda = -\lambda(\lambda^2+4)$$

χ_A n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$: la matrice A n'est donc pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Mais dans $\mathbb{C}$, il y a trois valeurs propres distinctes : 0, $2i$ et $-2i$.

La matrice A est donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

On voit que le vecteur $(1,0,1)$ dirige le sous-espace propre pour $\lambda = 0$.

Pour $\lambda = 2i$, le sous-espace propre s'obtient en résolvant le système :

$$\begin{cases} -2ix - 2y = 0 \\ x - 2iy - z = 0 \\ 2y - 2iz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = iy \\ z = -iy \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z) = iy(1,-i,-1) \text{ avec } y \in \mathbb{C}$$

Pour $\lambda = -2i$, il suffit de procéder par conjugaison, car A est à coefficients réels.

Le sous-espace propre est engendré par le vecteur $(1, i, -1)$.

Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}$, on a donc : $P^{-1}AP = D$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.