Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]
Diagonaliser la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 [Indication] [Correction]
Diagonaliser la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}$ si possible, sinon dans $\mathbb{C}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]
Diagonaliser la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 4 [Indication] [Correction]
Donner une CNS sur a, b, c, d, e, f pour que $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 5 [Indication] [Correction]
Diagonaliser la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

Exercice 6 [Indication] [Correction]
Trouver *une* matrice M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ telle que $M^2 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
On donnera deux méthodes différentes.

Exercice 7 [Indication] [Correction]
Trouver *toutes* les matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ tq $M^2 = A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 [Indication] [Correction]
Peut-on diagonaliser la matrice B définie par $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$?

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

On trouve $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

On trouve $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

On trouve $\chi_A(\lambda) = 1 - \lambda^5$: les valeurs propres de A sont les racines cinquièmes de l'unité.

On pose $\omega = \exp(\frac{2i\pi}{5})$.

On trouve $P^{-1}AP = D$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega & \omega^3 \\ 1 & \omega^3 & \omega & \omega^4 & \omega^2 \\ 1 & \omega^4 & \omega^3 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^4 \end{pmatrix}$

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

La condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable est $a = f = 0$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

On a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a+b+c\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & a+b-c\sqrt{2} \end{pmatrix}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

- Première méthode : si $A = PDP^{-1}$, utiliser Δ diagonale telle que $\Delta^2 = D$.
- Deuxième méthode : on a $A^2 = 3I + 2A$. Chercher $M = xI + yA$ telle que $M^2 = A$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 [Retour à l'énoncé]

Si $A = PDP^{-1}$, avec D diagonale, trouver les Δ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $\Delta^2 = D$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 8 [Retour à l'énoncé]

$\lambda = 0$ est une valeur propre double, mais $\ker B$ est une droite vectorielle.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On calcule le polynôme caractéristique.

$$\begin{aligned}\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} -1-x & 1 & 1 \\ 1 & -1-x & 1 \\ 1 & 1 & -1-x \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1-x & 1 \\ 1 & 1 & -1-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2-x & 0 \\ 0 & 0 & -2-x \end{vmatrix} = (1-x)(x+2)^2 : \begin{cases} 1 \text{ est valeur propre simple} \\ -2 \text{ est valeur propre double} \end{cases}\end{aligned}$$

Notons E_1 et E_{-2} les deux sous-espaces propres.

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2} \Leftrightarrow x+y+z=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

On voit que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour $\lambda = 1$.

On a ainsi obtenu une base de vecteurs propres.

La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On calcule le polynôme caractéristique de A.

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 4\lambda = -\lambda(\lambda^2+4)$$

χ_A n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$: la matrice A n'est donc pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
Mais dans $\mathbb{C}$, il y a trois valeurs propres distinctes : 0, $2i$ et $-2i$.
La matrice A est donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
On voit que le vecteur $(1,0,1)$ dirige le sous-espace propre pour $\lambda = 0$.
Pour $\lambda = 2i$, le sous-espace propre s'obtient en résolvant le système :

$$\begin{cases} -2ix - 2y = 0 \\ x - 2iy - z = 0 \\ 2y - 2iz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = iy \\ z = -iy \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z) = iy(1,-i,-1) \text{ avec } y \in \mathbb{C}$$

Pour $\lambda = -2i$, il suffit de procéder par conjugaison, car A est à coefficients réels.
Le sous-espace propre est engendré par le vecteur $(1, i, -1)$.

Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}$, on a donc : $P^{-1}AP = D$.