Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Montrer que $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie pour $u = (x, y)$ par $N(u) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x + ty|$ est une norme.

Représenter la boule unité fermée de centre 0.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soient E un espace vectoriel normé, et x, y, z, t quatre vecteurs de E.

Montrer que $\|x - t\| + \|y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - t\| + \|t - z\| + \|z - x\|$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit E un espace vectoriel normé.

Pour toutes parties A et B de E, on note $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$.

1. Montrer que si A et B sont compactes, alors $A + B$ est compacte.
2. Montrer que si A est compacte et B fermée, alors $A + B$ est fermée.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$.

1. Pour tout a de E, montrer que f_a définie par $x \mapsto f_a(x) =< a, x >$ est continue.
2. Pour toute partie A de E, on rappelle que $A^\perp = \{x \in E, \forall a \in A, < a, x >= 0\}$.
   Montrer que $A^\perp$ est un ensemble fermé (donner deux démonstrations.)

Exercice 5 [Indication] [Correction]

On munit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de l'une des trois normes usuelles :

Pour toute matrice $A = (a_{ij})$: $\|A\|_1 = \sum |a_{ij}|$, $\|A\|_2 = \sqrt{\sum a_{ij}^2}$, $\|A\|_\infty = \sup |a_{ij}|$

Dans chaque cas, calculer la norme de l'application linéaire "trace".

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On montre facilement que N est une norme.

Pour tout $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, montrer que $N(u)\leq 1 \iff \begin{cases} -1\leq x\leq 1 \\ -x-1\leq y\leq -x+1 \end{cases}$

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Appliquer quatre fois l'inégalité triangulaire : $\|x-t\|\leq\|x-y\|+\|y-t\|,\cdots$

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

1. Se donner une suite $(u_n=a_n+b_n)$ de $A+B$.
   Procéder à deux extractions de suites consécutives.
2. Se donner une suite $(u_n=a_n+b_n)$ de $A+B$, convergente vers ℓ.
   Extraire une suite convergente de la suite (a_n).

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

1. Vérifier que f_a est lipschitzienne de rapport $\|a\|$.

2.a) Soit (x_n) une suite de $A^\perp$, convergente vers ℓ. Montrer que $\ell\in A^\perp$.

b) $A^\perp$ est l'intersection des $\{a\}^\perp$, pour $a\in A$, et les $\{a\}^\perp$ sont fermés car...

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

- Avec la norme $A\to\|A\|_1$:
  Vérifier l'inégalité (non améliorable) $|\mathrm{tr}\,(A)|\leq\|A\|_1$. Donc $\|\mathrm{tr}\,\|=1$.
- Avec la norme $A\to\|A\|_2$:
  Appliquer Cauchy-Schwarz. En déduire $\|\mathrm{tr}\,\|=\sqrt{n}$.
- Avec la norme $A\to\|A\|_\infty$: on trouve $\|\mathrm{tr}\,\|=n$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.