# Énoncés des exercices

**Exercice 1** [Indication] [Correction]

Soit $f$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(1) = 1$ et que :

$$\begin{cases} \text{Pour tout } x \neq 0,\ f(x)\, f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 & (1) \\ \text{Pour tous réels } x \text{ et } y,\ f(x+y) = f(x) + f(y) & (2). \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ est impaire.
2. Prouver que pour tout rationnel $x$, $f(x) = x$.
3. Vérifier que pour tout réel $x$, $f(x^2) = f(x)^2$.
4. En déduire que $f$ est croissante.
5. Prouver finalement que pour tout réel $x$, $f(x) = x$.

**Exercice 2** [Indication] [Correction]

Soit $f$ une application définie sur $\mathbb{R}$, continue, et telle que $\lim_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = \ell$.

Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$.

**Exercice 3** [Indication] [Correction]

Soit $f$ une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que pour tout $x$ de $[a, b]$, il existe $\varepsilon_x > 0$ tel que $f(x) = \dfrac{1}{2}(f(x+\varepsilon_x) + f(x-\varepsilon_x))$.

Montrer que $f$ est une application affine.

**Exercice 4** [Indication] [Correction]

Montrer qu'il n'existe pas d'application continue $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

– L'image de tout rationnel est un irrationnel.

– L'image de tout irrationnel est un rationnel.

**Exercice 5** [Indication] [Correction]

On définit $f : ]0, 1[ \to \mathbb{R}$ de la manière suivante :

– Si $x$ est irrationnel, $f(x) = 0$.

– Si $x$ s'écrit $\dfrac{p}{q}$ (fraction irréductible), alors $f(x) = \dfrac{1}{q}$.

Montrer que $f$ est continue sur les irrationnels et discontinue sur les rationnels.


©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

# Indications ou résultats

**Indication pour l'exercice 1** [Retour à l'énoncé]

1. Utiliser la relation $f(x+y)=f(x)+f(y)$, en choisissant bien $x$ et $y$.
2. Prouver la relation $f(na)=nf(a)$ pour tout $n$ de $\mathbb{Z}$ et tout $a$ de $\mathbb{R}$.
3. Étudier la quantité $f\left(\frac{1}{x(1-x)}\right)$.
4. Il suffit d'observer que $f$ reste positive sur $\mathbb{R}^+$.
5. Utiliser des suites adjacentes de rationnels convergeant vers $x$.

**Indication pour l'exercice 2** [Retour à l'énoncé]

– Traiter d'abord le cas $\ell=0$.
Pour cela considérer $\varepsilon>0$ et un réel $x_0>0$ tel que $x\geq x_0\Rightarrow|f(x+1)-f(x)|\leq\varepsilon$.
Se donner $x\geq x_0$ et introduire la partie entière $m$ de $x-x_0$.
Evaluer alors $f(x)$ en fonction de $f(x-m)$ et de quantités du type $f(x+k+1)-f(x+k)$.
– Dans le cas $\ell\in\mathbb{R}$, introduire une fonction auxiliaire qui ramène au cas précédent.
– Dans le cas $\ell=\infty$, adapter la méthode vue dans le cas $\ell=0$.

**Indication pour l'exercice 3** [Retour à l'énoncé]

– Traiter d'abord le cas où $f(a)=f(b)$ et montrer que $f$ est constante sur $[a,b]$.
On pourra considérer le plus petit $x_0$ tel que $f(x_0)=\min f$ et supposer $a<x_0<b$.
– Si $f(a)\neq f(b)$, une transformation simple permet de se ramener au cas précédent.

**Indication pour l'exercice 4** [Retour à l'énoncé]

Raisonner par l'absurde, et introduire l'application $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(x)+x$.

**Indication pour l'exercice 5** [Retour à l'énoncé]

– Pour la discontinuité en $a\in\mathbb{Q}$, utiliser la densité des irrationnels dans $\mathbb{R}$.
– Pour la continuité en $a\notin\mathbb{Q}$, considérer $A_\varepsilon=\{x\in]0,1[,f(x)\geq\varepsilon\}$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.