Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous x, y : $|f(x) - f(y)| = |x - y|$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Trouver les applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui admettent 1 et $\sqrt{2}$ comme périodes.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soient f et g deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que les applications $\inf(f, g)$ et $\sup(f, g)$ sont continues.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Trouver les applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Trouver les applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y : f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue.

Montrer que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |f(x)| = +\infty \Leftrightarrow$ l'image réciproque par f de tout compact est un compact.

Exercice 7 [Indication] [Correction]

Pour tout x de $I =]0, 1[$, de développement décimal $x = 0, r_1 r_2 \ldots r_n \ldots$, on pose :

$f(x) = 0, r_2 r_1 r_4 r_3 \ldots$. Etudier la continuité de f.

Exercice 8 [Indication] [Correction]

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\mathbb{R}^+$: $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$.

1. Montrer qu'il existe un unique u_n positif tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. Montrer que la suite (u_n) est convergente et que $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 9 [Indication] [Correction]

Soit λ un réel strictement compris entre 0 et 1.

Prouver l'existence et l'unicité de la racine positive x_n de $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \lambda \exp x$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x_n = +\infty$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Se donner une solution f, et noter que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x, montrer l'existence de $\varepsilon_x \in \{-1, 1\}$ tel que $f(x) = f(0) + \varepsilon_x x$.

Montrer que l'application $x \mapsto \varepsilon_x$ est constante sur $\mathbb{R}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Se donner une solution f, et noter que $t_n = (\sqrt{2}-1)^n$ est une période de f.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Se souvenir d'une expression de $\sup(x, y)$ et $\inf(x, y)$ valable pour tous réels x et y.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Se donner une solution f du problème. Montrer qu'on peut se ramener au cas $f(0) = 0$.

Montrer que $f(x) = ax$, pour $x \in \mathbb{Z}$, puis x de la forme $x = \dfrac{m}{2^n}$, avec $m \in \mathbb{N}$, puis x réel.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Soit f une solution. Montrer que $f(0) = 0$, et que f est impaire.

Prouver $f(n\lambda) = nf(\lambda)$ pour $n \in \mathbb{Z}$, puis $f(r) = f(1)r$ pour $r \in \mathbb{Q}$.

Utiliser la continuité pour montrer que $f(x) = ax$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Se souvenir que l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.

Sinon il suffit d'utiliser la définition de $\lim\limits_{x \to \pm\infty} |f(x)| = +\infty$.

Indication pour l'exercice 7 [Retour à l'énoncé]

Montrer que f est discontinue sur les décimaux, et continue sur les "non-décimaux"

Indication pour l'exercice 8 [Retour à l'énoncé]

Montrer que la suite (u_n) est décroissante en utilisant une relation entre f_n et f_{n+1}.

Indication pour l'exercice 9 [Retour à l'énoncé]

Pour tout n de $\mathbb{N}$, étudier l'application $\varphi_n : x \mapsto \varphi_n(x) = \mathrm{e}^{-x} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.