Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit f une application continue de $[a, b]$ dans lui-même.
Montrer qu'il existe un point x_0 de $[a, b]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue et injective. Montrer que f est strictement monotone.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, continue et telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer que pour tout entier $n > 0$, il existe un réel α_n de $[0, 1]$ tel que $f(\alpha_n + \frac{1}{n}) = f(\alpha_n)$.
2. Montrer que ce résultat est faux si on remplace $\frac{1}{n}$ par $\lambda \in]0, 1[$, avec $\frac{1}{\lambda} \notin \mathbb{N}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soient $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, continues, telles que $f(0) = g(1) = 0$ et $f(1) = g(0) = 1$.
Montrer que pour tout $\lambda \geq 0$, il existe x_0 dans $[0, 1]$ tel que $f(x) = \lambda g(x)$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, continues et telles que : $\forall x \in [a, b]$, $0 < g(x) < f(x)$.
Montrer qu'il existe un réel $\lambda > 1$ tel que, pour tout x de $[a, b]$: $f(x) \geq \lambda g(x)$.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Soit f une application croissante sur $[a, b]$.
Montrer que l'ensemble de ses points de discontinuité est au plus dénombrable.

Exercice 7 [Indication] [Correction]

Donner un exemple d'une application $f : [0, 1] \to [0, 1]$, strictement croissante et ayant une infinité dénombrable de points de discontinuité.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.