

## Énoncés des exercices

**EXERCICE 1** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $f$  une application continue de  $[a, b]$  dans lui-même.

Montrer qu'il existe un point  $x_0$  de  $[a, b]$  tel que  $f(x_0) = x_0$ .

**EXERCICE 2** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue et injective. Montrer que  $f$  est strictement monotone.

**EXERCICE 3** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue et telle que  $f(0) = f(1)$ .

1. Montrer que pour tout entier  $n > 0$ , il existe un réel  $\alpha_n$  de  $[0, 1]$  tel que  $f(\alpha_n + \frac{1}{n}) = f(\alpha_n)$ .
2. Montrer que ce résultat est faux si on remplace  $\frac{1}{n}$  par  $\lambda \in ]0, 1[$ , avec  $\frac{1}{\lambda} \notin \mathbb{N}$ .

**EXERCICE 4** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , continues, telles que  $f(0) = g(1) = 0$  et  $f(1) = g(0) = 1$ .

Montrer que pour tout  $\lambda \geq 0$ , il existe  $x_0$  dans  $[0, 1]$  tel que  $f(x) = \lambda g(x)$ .

**EXERCICE 5** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continues et telles que :  $\forall x \in [a, b], 0 < g(x) < f(x)$ .

Montrer qu'il existe un réel  $\lambda > 1$  tel que, pour tout  $x$  de  $[a, b]$  :  $f(x) \geq \lambda g(x)$ .

**EXERCICE 6** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $f$  une application croissante sur  $[a, b]$ .

Montrer que l'ensemble de ses points de discontinuité est au plus dénombrable.

**EXERCICE 7** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Donner un exemple d'une application  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , strictement croissante et ayant une infinité dénombrable de points de discontinuité.