Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soient f et g deux applications continues sur le segment $[a, b]$, à valeurs réelles.
On définit l'application M par, pour tout réel α : $M(\alpha) = \max\limits_{x \in [a,b]} (f(x) + \alpha g(x))$.
Montrer que l'application M est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ telle que, pour tous x, y de $[a, b]$, on ait $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$.
Montrer que f est l'une des deux applications $x \mapsto x$ ou $x \mapsto a + b - x$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uniformément continue.
Montrer qu'il existe deux réels $a, b \geq 0$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq a|x| + b$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ (on demande deux méthodes.)

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Prouver (f, g uniformément continues et bornées) $\Rightarrow$ (fg uniformément continue).
Donner un contre-exemple quand on ne suppose plus que f et g sont bornés.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Montrer que l'application $x \mapsto \sin x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 [Indication] [Correction]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue, telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ existent dans $\mathbb{R}$.
Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 [Indication] [Correction]

Soient a, b deux réels tels que $0 < a < b$, et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
On suppose $\exists\, k > 0$, $\forall x, y \in [a, b]$ (avec $x \neq y$), $|f(y) - f(x)| < k|y^3 - x^3|$.

1. Montrer que f est uniformément continue sur $[a, b]$.
2. Montrer que $\varphi : x \mapsto f(x) - kx^3$ est strictement monotone sur $[a, b]$.
3. On suppose que pour tout x de $[a, b]$, $ka^3 \leq f(x) \leq kb^3$.
   Montrer qu'il existe un α unique de $[a, b]$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$.

Exercice 9 [Indication] [Correction]

On se donne un réel α de $]0, 1[$.
En revenant à la définition, montrer que $x \mapsto x^\alpha$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Pour tout réel α, introduire l'application $h_\alpha : x \mapsto f(x) + \alpha g(x)$.

Se donner α_0 (resp. α_1) et les réels x_0 (resp. x_1) où h_{α_0} (resp. h_{α_1}) prend son maximum.

Chercher ensuite à encadrer la quantité $M(\alpha_0) - M(\alpha_1)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Penser à utiliser $x = a$ et $y = b$. Il n'est pas question de continuité dans cet exercice.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Considérer $\alpha > 0$ tel que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 1$.

Pour tout $x \neq 0$, découper $[0, x]$ en sous-segments de longueur juste inférieure ou égale à α.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Première méthode : théorème de Heine sur $[0, 2]$ et application lipschitzienne sur $[2, +\infty[$.

Deuxième méthode : démontrer que $0 \leq y \leq x \ \Rightarrow\ 0 \leq \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x - y}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Utiliser $(fg)(x) - (fg)(y) = f(x)(g(x) - g(y)) + g(y)(f(x) - f(y))$.

Pour le contre-exemple, le carré d'une fonction très simple convient.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

Considérer $x_n = \sqrt{n\pi}$ et $y_n = \sqrt{(n+1)\pi}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 [Retour à l'énoncé]

Se donner $A > 0$ tel que $x \leq -A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, et tel que $x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Utiliser ensuite le théorème de Heine sur $[-A - 1, A + 1]$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 8 [Retour à l'énoncé]

(1 : Prouver que f est lipschitzienne. (2 : Traduire l'hypothèse sur f.

(3 : L'application φ est bijective continue et change de signe.

INDICATION POUR L'EXERCICE 9 [Retour à l'énoncé]

Prouver que : $0 \leq x \leq y \Rightarrow 0 \leq y^\alpha - x^\alpha \leq (y - x)^\alpha$.