Énoncés des exercices

Exercice 1 [Correction]

Résoudre l'équation $\arcsin 2x - \arcsin x\sqrt{3} = \arcsin x$.

Exercice 2 [Correction]

Simplifier $y(x) = \arccos(1 - 2x^2)$.

Exercice 3 [Correction]

Simplifier $y(x) = \arccos \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$

Exercice 4 [Correction]

Calculer la valeur exacte de $x = \sin(\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{3})$.

Exercice 5 [Correction]

Simplifier $y(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

Exercice 6 [Correction]

Simplifier $y(x) = \arcsin(3x - 4x^3)$.

Exercice 7 [Correction]

Étudier l'application $x \mapsto f(x) = \arcsin \sqrt{\dfrac{1 + \sin(2x)}{2}}$.

Exercice 8 [Correction]

Étudier l'application $x \mapsto f(x) = \arcsin \cos x + \arccos \sin x$.

Exercice 9 [Correction]

Etudier l'application $x \mapsto f(x) = \arccos \cos x + \dfrac{1}{2} \arccos \cos 2x$.

Exercice 10 [Correction]

Etudier l'application $x \mapsto f(x) = \arccos \cos x + \dfrac{1}{2} \arccos \cos 2x + \dfrac{1}{6} \arccos \cos 3x$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Remarquons que le domaine de définition en x est $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, et que $x = 0$ est solution évidente.

Par imparité, on peut se contenter de chercher les solutions dans $]0, \frac{1}{2}]$.

Si x est l'une d'elles, $\arcsin 2x - \arcsin x\sqrt{3}$ est dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\arcsin x$ est dans $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Ces deux membres sont donc égaux si et seulement si ils ont le même sinus.

Ainsi, pour tout x de $]0, \frac{1}{2}]$:

$$\arcsin x = \arcsin 2x - \arcsin x\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \sin(\arcsin 2x - \arcsin x\sqrt{3})$$
$$\Leftrightarrow x = 2x\sqrt{1-3x^2} - x\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{3}\sqrt{1-4x^2} = 2\sqrt{1-3x^2}$$
$$\Leftrightarrow 1 + 3(1-4x^2) + 2\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2} = 4(1-3x^2) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Conclusion : les solutions de l'équation sont $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

La quantité $y(x)$ est définie $\Leftrightarrow -1 \leq 1 - 2x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Remarquons que l'application $x \mapsto y(x)$ est paire. On va l'étudier sur $[0, 1]$.

Pour tout x de $[0, 1]$, posons $x = \sin\theta$, avec $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (donc $\theta = \arcsin x$.)

Alors $y(x) = \arccos(1 - 2\sin^2\theta) = \arccos(\cos 2\theta) = 2\theta$ (car $2\theta \in [0, \pi]$.)

On a donc $y(x) = 2\arcsin x$ sur $[0, 1]$, et $y(x) = 2\arcsin|x| = 2|\arcsin x|$ sur $[-1, 1]$.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

La quantité $y(x)$ est définie pour $-1 \leq \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$ c'est-à-dire pour tout x de $\mathbb{R}$.

Remarquons que l'application $x \mapsto y(x)$ est paire. On va l'étudier sur $\mathbb{R}^+$.

Soit x un élément quelconque de $\mathbb{R}^+$. Posons $x = \tan\theta$, avec $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, donc $\theta = \arctan x$.

On $y(x) = \arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \arccos\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \arccos(\cos 2\theta) = 2\theta$ (car $2\theta \in [0, \pi]$.)

On a donc $y(x) = 2\arctan x$ sur $\mathbb{R}^+$, et $y(x) = 2\arctan|x| = 2|\arctan x|$ sur $\mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

On a : $1 - 2x^2 = 1 - 2\sin^2(\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{3}) = \cos(\arcsin\dfrac{1}{3}) = \sqrt{1-\dfrac{1}{9}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Il en découle $x^2 = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{6} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{6}$ donc $x = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}$ car $x \geq 0$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.