Énoncés des exercices

Exercice 1 [Corrigé]

Donner la valeur de $y = 2\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$ pour $x = \frac{1}{2}\ln 3$.

Exercice 2 [Corrigé]

Exprimer $y = \operatorname{ch}^4 x + \operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^3 x + \operatorname{sh}^4 x$ à l'aide de l'exponentielle.

Exercice 3 [Corrigé]

Simplifier le produit $P_n(x) = \operatorname{ch}\frac{x}{2} \cdot \operatorname{ch}\frac{x}{2^2} \cdots \operatorname{ch}\frac{x}{2^n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x)$.

Exercice 4 [Corrigé]

Calculer la somme $A_n(x) = \operatorname{ch} x + \operatorname{ch}(x+2h) + \cdots + \operatorname{ch}(x+2nh)$.

Exercice 5 [Corrigé]

Résoudre l'équation $\operatorname{sh} a + \operatorname{sh}(a+x) + \operatorname{sh}(a+2x) + \operatorname{sh}(a+3x) = 0$.

Exercice 6 [Corrigé]

Simplifier l'expression $A_n(x) = \operatorname{ch} x + 2\operatorname{ch} 2x + \cdots + n\operatorname{ch} nx$.

Exercice 7 [Corrigé]

Calculer la dérivée n-ième de $f(x) = \sin x \operatorname{sh} x$.

Exercice 8 [Corrigé]

Calculer la dérivée n-ième de $f(x) = \mathrm{e}^{x\operatorname{ch} a}\operatorname{ch}(x\operatorname{sh} a)$.

Exercice 9 [Corrigé]

Vérifier l'égalité $|\arctan \operatorname{sh} x| = \arccos\frac{1}{\operatorname{ch} x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Exercice 10 [Corrigé]

Montrer que la tangente en un point M de la courbe $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ est parallèle à l'une des tangentes au cercle $x^2 + y^2 = a^2$, menée de la projection P de M sur Oy.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On a : $y = 2\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + 3\mathrm{e}^{-x})$.

Or $x = \ln\sqrt{3}$ donc $\mathrm{e}^x = \sqrt{3}$ et $\mathrm{e}^{-x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Ainsi $y = \sqrt{3}$.

On confirme avec Maple :

```
> y:=2*cosh(x)-sinh(x);
```

$$y := 2\cosh(x) - \sinh(x)$$

```
> convert(eval(y,x=ln(sqrt(3))),exp);
```

$$\sqrt{3}$$

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On trouve successivement :

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{ch}^4 x + \operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^3 x + \operatorname{sh}^4 x = \operatorname{ch}^3 x(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) + \operatorname{sh}^3 x(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) \\ &= (\operatorname{ch}^3 x + \operatorname{sh}^3 x)\mathrm{e}^x = (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + \operatorname{sh}^2 x)\mathrm{e}^x \\ &= (\operatorname{ch} 2x - \tfrac{1}{2}\operatorname{sh} 2x)\mathrm{e}^{2x} = \tfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^{-2x})\mathrm{e}^{2x} = \tfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{4x} + 3) \end{aligned}$$

Voici une autre méthode :

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{ch}^4 x + \operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^3 x + \operatorname{sh}^4 x \\ &= (\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x)^2 + 2\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x(\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}\operatorname{sh}^2 2x + \tfrac{1}{2}\operatorname{sh} 2x \operatorname{ch} 2x = 1 + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\operatorname{sh} 2x = \tfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{4x} + 3) \end{aligned}$$

On confirme avec Maple :

```
> y:=cosh(x)^4+cosh(x)^3*sinh(x)+sinh(x)^3*cosh(x)+sinh(x)^4;
```

$$y := (\cosh(x))^4 + (\cosh(x))^3 \sinh(x) + (\sinh(x))^3 \cosh(x) + (\sinh(x))^4$$

```
> simplify(convert(y,exp));
```

$$1/4\, e^{4x} + 3/4$$

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

$$P_n(x)\operatorname{sh}\frac{x}{2^n} = \operatorname{ch}\frac{x}{2} \cdot \operatorname{ch}\frac{x}{2^2} \cdots \operatorname{ch}\frac{x}{2^{n-1}}\left(\operatorname{sh}\frac{x}{2^n}\operatorname{ch}\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2}P_{n-1}(x)\operatorname{sh}\frac{x}{2^{n-1}}$$

Par une récurrence évidente : $P_n(x)\operatorname{sh}\dfrac{x}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}P_1(x)\operatorname{sh}\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2^{n-1}}\operatorname{sh}\dfrac{x}{2}\operatorname{ch}\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2^n}\operatorname{sh} x$.

Ainsi $P_n(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{2^n \operatorname{sh}\dfrac{x}{2^n}}$. Comme $\operatorname{sh}\dfrac{x}{2^n} \sim \dfrac{x}{2^n}$ quand $n \to \infty$ on trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x) = 1$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.