Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Corrigé]

On se donne deux droites distinctes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ du plan.
Soient A, B, C, A', B', C' six points distincts : A, B, C sur $\mathcal{D}$ et A', B', C' sur $\mathcal{D}'$.
On suppose que $(AA') \parallel (BB')$.
Montrer que $(AA') \parallel (CC')$ si et seulement si $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$ *(Théorème de Thalès).*

EXERCICE 2 [Corrigé]

Soient A, B, C trois points non alignés du plan.
On se donne A', B', C' respectivement sur $(BC), (AC), (AB)$ et distincts de A, B, C.
Montrer que A', B', C' sont alignés $\Leftrightarrow \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$ *(Théorème de Menelaüs.)*

EXERCICE 3 [Corrigé]

On considère trois droites $\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B, \mathcal{D}_C$ passant respectivement par trois A, B, C non alignés.
On suppose que $\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B, \mathcal{D}_C$ coupent respectivement les droites $(BC), (CA), (AB)$ en A', B', C'.
Montrer que $\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B, \mathcal{D}_C$ sont parallèles ou concourantes $\Leftrightarrow \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$
Ce résultat est connu sous le nom de *Théorème de Ceva*.

EXERCICE 4 [Corrigé]

On se donne deux droites affines disctinctes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ du plan.
Soient A, B, C trois points distincts de $\mathcal{D}$, et A', B', C' trois points distincts de $\mathcal{D}'$.
Montrer que si $\begin{cases} (AB') \parallel (BA') \\ (BC') \parallel (CB') \end{cases}$ alors alors $(CA') \parallel (AC')$ *(Théorème de Pappus).*

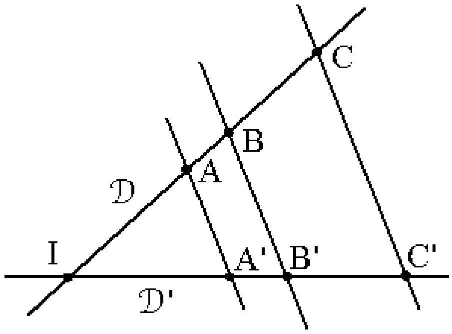
EXERCICE 5 [Corrigé]

On se donne deux triangles ABC et $A'B'C'$ du plan, sans sommets communs.
On suppose que $(AB) \parallel (A'B')$ et $(BC) \parallel (B'C')$.
Montrer que $(AC) \parallel (A'C') \Leftrightarrow (AA'), (BB'), (CC')$ sont parallèles ou concourantes.
Ce résultat est connu sous le nom de *Théorème de Desargues*.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]



Supposons que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ soient concourantes en I.

Soit h l'homothétie de centre I telle que $h(A) = B$.

Le point $h(A')$ est sur la droite (IA') (cette droite est globalement invariante par h) et il est sur la parallèle à (AA') menée par B (une homothétie transforme une droite en une droite parallèle.)

Ainsi $h(A') \in (IA') \cap (BB')$, donc $h(A') = B'$.

On en déduit $\dfrac{\overline{IB}}{\overline{IA}} = \dfrac{\overline{IB'}}{\overline{IA'}}$ (c'est le rapport de h.)

Il en découle $\dfrac{\overline{IA'}}{\overline{IA}} = \dfrac{\overline{IB'}}{\overline{IB}} = \dfrac{\overline{IB'} - \overline{IA'}}{\overline{IB} - \overline{IA}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$.

- Supposons $(CC') \parallel (AA')$. Comme ci-dessus, on trouve $\dfrac{\overline{IA'}}{\overline{IA}} = \dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$.

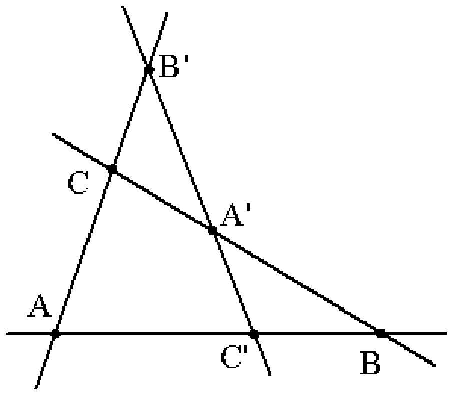
  Ainsi $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$ donc $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$.
- Réciproquement, supposons qu'on ait l'égalité $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$. Soit C'' à l'intersection de (IA) et de la parallèle à (AA') menée de C.

  En utilisant le sens direct, on trouve l'égalité $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C''}}$.

  Ainsi $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C''}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$ donc $\overline{A'C''} = \overline{A'C'}$ donc $C' = C''$, donc $(CC') \parallel (AA')$.
- Remarque : on a supposé $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ concourantes. Si elles sont parallèles, on reprend la même démonstration, mais en remplaçant l'homothétie h par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

1. Première démonstration (en utilisant des barycentres)

   Il existe des réels α, β, γ, différents de 0 et de 1, tels que :

   $A' = \alpha B + (1-\alpha)C,\ B' = \beta C + (1-\beta)A,\ C' = \gamma A + (1-\gamma)B$.

   On en déduit $\begin{cases} \overrightarrow{A'B'} = -\alpha\overrightarrow{AB} + (\alpha + \beta - 1)\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{A'C'} = (1 - \alpha - \gamma)\overrightarrow{AB} + (\alpha - 1)\overrightarrow{AC} \end{cases}$

   On en déduit, dans la base canonique :

   $\det(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$

   $= (\alpha(1-\alpha) + (\alpha+\beta-1)(\alpha+\gamma-1)) \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

   $= (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - \alpha - \beta - \gamma + 1) \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

   On a alors : A', B', C' alignés $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \alpha + \beta + \gamma - 1$.

   On a aussi $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \dfrac{\alpha-1}{\alpha}$, $\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \dfrac{\beta-1}{\beta}$ et $\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \dfrac{\gamma-1}{\gamma}$.

   Donc $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha-1}{\alpha} \cdot \dfrac{\beta-1}{\beta} \cdot \dfrac{\gamma-1}{\gamma} = 1 \Leftrightarrow \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \alpha + \beta + \gamma - 1$.

   On est arrivé à la même condition, ce qui démontre le théorème.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.