

## Énoncés des exercices

### EXERCICE 1 [Corrigé]

On se donne deux droites distinctes  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  du plan.

Soient  $A, B, C, A', B', C'$  six points distincts :  $A, B, C$  sur  $\mathcal{D}$  et  $A', B', C'$  sur  $\mathcal{D}'$ .

On suppose que  $(AA') \parallel (BB')$ .

Montrer que  $(AA') \parallel (CC')$  si et seulement si  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$  (*Théorème de Thalès*).

### EXERCICE 2 [Corrigé]

Soient  $A, B, C$  trois points non alignés du plan.

On se donne  $A', B', C'$  respectivement sur  $(BC), (AC), (AB)$  et distincts de  $A, B, C$ .

Montrer que  $A', B', C'$  sont alignés  $\Leftrightarrow \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$  (*Théorème de Menelaüs*).

### EXERCICE 3 [Corrigé]

On considère trois droites  $\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B, \mathcal{D}_C$  passant respectivement par trois  $A, B, C$  non alignés.

On suppose que  $\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B, \mathcal{D}_C$  coupent respectivement les droites  $(BC), (CA), (AB)$  en  $A', B', C'$ .

Montrer que  $\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B, \mathcal{D}_C$  sont parallèles ou concourantes  $\Leftrightarrow \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$ .

Ce résultat est connu sous le nom de *Théorème de Ceva*.

### EXERCICE 4 [Corrigé]

On se donne deux droites affines distinctes  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  du plan.

Soient  $A, B, C$  trois points distincts de  $\mathcal{D}$ , et  $A', B', C'$  trois points distincts de  $\mathcal{D}'$ .

Montrer que si  $\begin{cases} (AB') \parallel (BA') \\ (BC') \parallel (CB') \end{cases}$  alors  $(CA') \parallel (AC')$  (*Théorème de Pappus*).

### EXERCICE 5 [Corrigé]

On se donne deux triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  du plan, sans sommets communs.

On suppose que  $(AB) \parallel (A'B')$  et  $(BC) \parallel (B'C')$ .

Montrer que  $(AC) \parallel (A'C') \Leftrightarrow (AA'), (BB'), (CC')$  sont parallèles ou concourantes.

Ce résultat est connu sous le nom de *Théorème de Desargues*.

## Corrigés des exercices

 CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Supposons que  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  soient concourantes en  $I$ .

Soit  $h$  l'homothétie de centre  $I$  telle que  $h(A) = B$ .

Le point  $h(A')$  est sur la droite  $(IA')$  (cette droite est globalement invariante par  $h$ ) et il est sur la parallèle à  $(AA')$  menée par  $B$  (une homothétie transforme une droite en une droite parallèle.)

Ainsi  $h(A') \in (IA') \cap (BB')$ , donc  $h(A') = B'$ .

On en déduit  $\frac{\overline{IB}}{\overline{IA}} = \frac{\overline{IB'}}{\overline{IA'}}$  (c'est le rapport de  $h$ .)

Il en découle  $\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}} = \frac{\overline{IB'}}{\overline{IB}} = \frac{\overline{IB'} - \overline{IA'}}{\overline{IB} - \overline{IA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ .

– Supposons  $(CC') \parallel (AA')$ . Comme ci-dessus, on trouve  $\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$ .

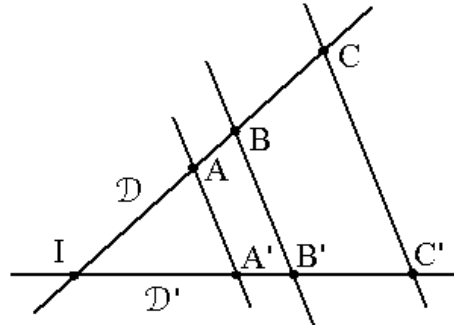
Ainsi  $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$  donc  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$ .

– Réciproquement, supposons qu'on ait l'égalité  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$ . Soit  $C''$  à l'intersection de  $(IA)$  et de la parallèle à  $(AA')$  menée de  $C$ .

En utilisant le sens direct, on trouve l'égalité  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C''}}$ .

Ainsi  $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C''}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$  donc  $\overline{A'C''} = \overline{A'C'}$  donc  $C' = C''$ , donc  $(CC') \parallel (AA')$ .

– Remarque : on a supposé  $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$  concourantes. Si elles sont parallèles, on reprend la même démonstration, mais en remplaçant l'homothétie  $h$  par la translation de vecteur  $\overline{AA'} = \overline{BB'}$ .


 CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

## 1. Première démonstration (en utilisant des barycentres)

Il existe des réels  $\alpha, \beta, \gamma$ , différents de 0 et de 1, tels que :

$$A' = \alpha B + (1-\alpha)C, \quad B' = \beta C + (1-\beta)A, \quad C' = \gamma A + (1-\gamma)B.$$

$$\text{On en déduit } \begin{cases} \overline{A'B'} = -\alpha \overline{AB} + (\alpha + \beta - 1) \overline{AC} \\ \overline{A'C'} = (1 - \alpha - \gamma) \overline{AB} + (\alpha - 1) \overline{AC} \end{cases}$$

On en déduit, dans la base canonique :

$$\begin{aligned} \det(\overline{A'B'}, \overline{A'C'}) &= (\alpha(1-\alpha) + (\alpha+\beta-1)(\alpha+\gamma-1)) \det(\overline{AB}, \overline{AC}) \\ &= (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - \alpha - \beta - \gamma + 1) \det(\overline{AB}, \overline{AC}). \end{aligned}$$

On a alors :  $A', B', C'$  alignés  $\Leftrightarrow \det(\overline{A'B'}, \overline{A'C'}) = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \alpha + \beta + \gamma - 1$ .

On a aussi  $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\alpha-1}{\alpha}$ ,  $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\beta-1}{\beta}$  et  $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\gamma-1}{\gamma}$ .

Donc  $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot \frac{\beta-1}{\beta} \cdot \frac{\gamma-1}{\gamma} = 1 \Leftrightarrow \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \alpha + \beta + \gamma - 1$ .

On est arrivé à la même condition, ce qui démontre le théorème.

