III Éléments algébriques d'une algèbre sur un corps commutatif

III.1 Polynôme minimal d'un élément d'une algèbre de dimension finie

Soit K un corps commutatif et E une K-algèbre. Pour un élément donné a de E on considère l'application $\Phi_a : K[X] \longmapsto E$ de l'anneau des polynômes à une indéterminée sur K vers E, qui à tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ associe l'élément de E obtenu en remplaçant l'indéterminée X par a : $\Phi_a(P) = \widetilde{P}(a) = \sum_{k=0}^{n} a_k a^k$. On vérifie que Φ_a est un morphisme de K-algèbres.

- ☞ L'image de Φ_a est la plus petite sous-algèbre de E contenant $K \cup \{a\}$: elle est notée $K[a]$. C'est aussi le sous-K-espace vectoriel de E engendré par $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$.
- ☞ Le noyau de Φ_a est l'idéal de l'anneau $K[X]$ constitué des polynômes P annulant a. Lorsqu'il existe un polynôme non nul $P \in K[X]$ annulant a on dit que a est algébrique sur K, sinon on dit que a est transcendant sur K. On a donc les équivalences

$$a \text{ est transcendant sur K } \iff \operatorname{Ker}\Phi_a = \{0\} \iff \Phi_a \text{ est injectif}.$$

- ☞ Si $K[a]$ (ou E) est de dimension finie en tant que K-espace vectoriel, alors Φ_a n'est pas injectif (puisque $K[X]$ est de dimension infinie) et a est algébrique sur K.
  Inversement, si a est algébrique sur K, il existe un polynôme non nul P de $K[X]$ de degré d tel que $\Phi_a(P) = \widetilde{P}(a) = 0$. Pour tout $b \in K[a]$ il existe $Q \in K[X]$ tel que $b = \widetilde{Q}(a)$. En effectuant la division euclidienne de Q par le polynôme non nul P, on peut écrire $Q = DP + R$ où D et R sont dans $K[X]$ et $\mathrm{d}^\circ R < d$. Alors $b = \widetilde{Q}(a) = \widetilde{D}(a)\widetilde{P}(a) + \widetilde{R}(a) = \widetilde{R}(a)$. Ainsi b appartient au K-espace $K_{d-1}[a]$ engendré par $a^0 = 1_E$, a, $\cdots$, a^{d-1}. Dès lors $K[a] = K_{d-1}[a]$ est de dimension finie au plus d. On a donc la caractérisation suivante des éléments algébriques :

Théorème

Pour tout élément a d'une K-algèbre :

$$a \text{ est algébrique sur } K \iff \text{la } K\text{-algèbre } \operatorname{Im}\Phi_a = K[a] \text{ est de dimension finie.}$$

Lorsque a est algébrique sur K, l'idéal *non nul* $\operatorname{Ker}\Phi_a$ de l'anneau euclidien $K[X]$ est de la forme $K[X]P_a$ où P_a est l'unique polynôme unitaire de degré minimum parmi ceux des polynômes unitaires annulant a. On dit que P_a *est le polynôme minimal de* a. La preuve précédente montre que le degré d_a de P_a est la dimension de $K[a]$ et plus précisément la famille $(a^k)_{k\in[\![0\,,d_a-1]\!]}$ est une base de $K[a]$.

- ➢ Si a est un élément algébrique d'une algèbre *intègre* E, le polynôme minimal P_a de a est *irréductible* en produit de polynômes de degré strictement inférieur à $d_a = \mathrm{d}^\circ P_a$, si bien que P_a est premier dans l'anneau euclidien $K[X]$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.